

Objectius

En esta quinzena aprendràs a:

- Identificar que és un poliedre.
- Determinar els elements d'un poliedre: Cares, Arestes i Vèrtexs.
- Classificar els poliedres.
- Especificar quan un poliedre és un prisma o una piràmide.
- Distingir els poliedres regulars convexos també anomenats sòlids platònics.
- Construir els poliedres a partir del seu desenvolupament pla.
- Diferenciar i catalogar alguns dels sòlids de revolució: Cilindre, Con i Esfera.
- Construir cilindres i cons rectes a partir del seu desenvolupament pla.

Abans de començar

1. Poliedres.....pàg. 138
Definició
Elements d'un poliedre
2. Tipus de poliedres.....pàg. 140
Prismes
Prismes regulars
Desenvolupament d'un prisma recte
Paralelepípedes
Piràmides
Piràmides regulars
Desenvolupament d'una piràmide recta
Poliedres regulars
Desenvolupament de poliedres regulars
Relació d'Euler
3. Cossos rodons.....pàg. 147
Cilindre
Desenvolupament d'un cilindre recte
Con
Desenvolupament d'un con recte
Esfera

Exercicis per a practicar

Per saber-ne més

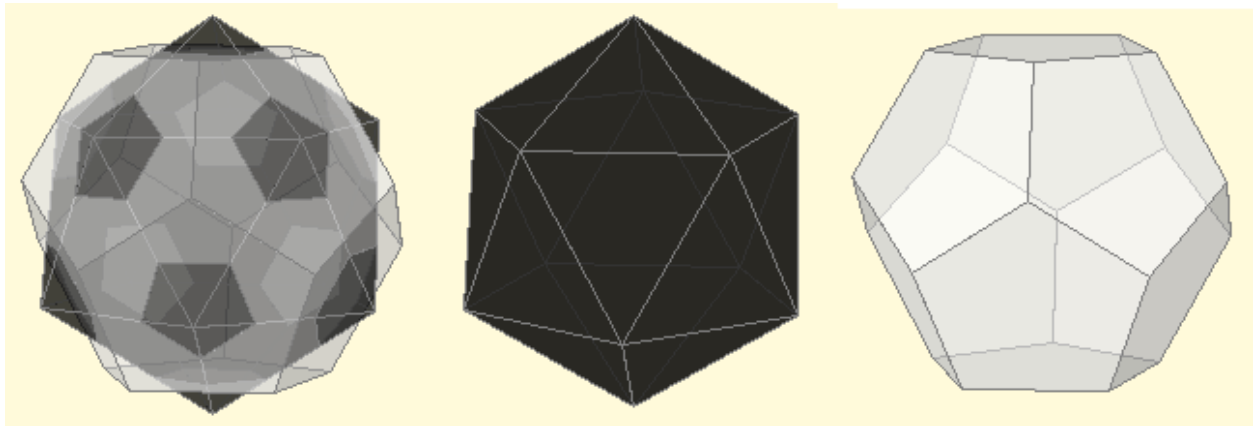
Resum

Autoavaluació

Solucions

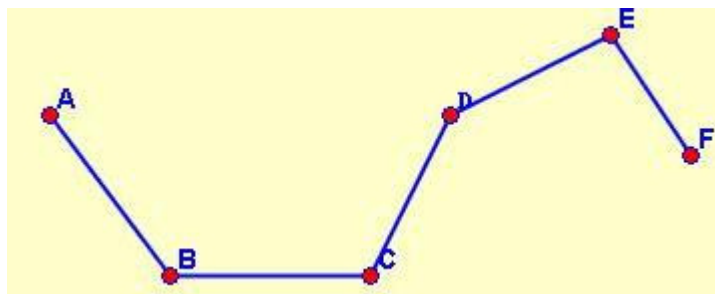
Abans de començar

Un pilota de futbol es pot construir amb polígons regulars: 12 pentàgons i 20 hexàgons. Aquí pots observar com s'obté en interseccar-se un icosaedre i un dodecaedre.



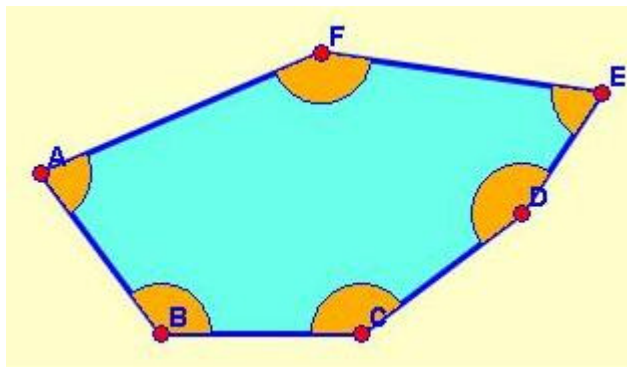
Recorda

Una **línia poligonal** és un conjunt de **segments concatenats** (cadascun comença on acaba l'anterior), i poden ser: **obertes** o **tancades**.



Línia poligonal

La **superfície** continguda per una **línia poligonal tancada** s'anomena **polígon**. Els polígons poden ser **còncavs** o **convexos**.

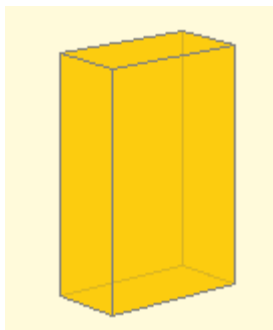


Aquest polígon és convex, perquè els seus angles interiors són més petits de 180°

Cossos geomètrics.

1. Poliedres

Definició



Un poliedre és un cos geomètric tridimensional les cares del qual són polígons, cada un d'ells és una **cara**.

El significat de **poli** és *molts* i el de **edre** és *cara*, per tant poliedre significa moltes cares.

En la imatge de l'esquerra tenim un poliedre amb sis cares que

són rectangles.

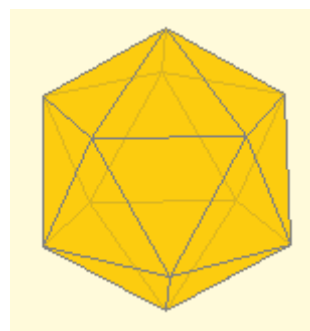
Contràriament, si al menys una de les superfícies que delimiten a un sòlid **no** és un polígon, aleshores **no és un poliedre**.



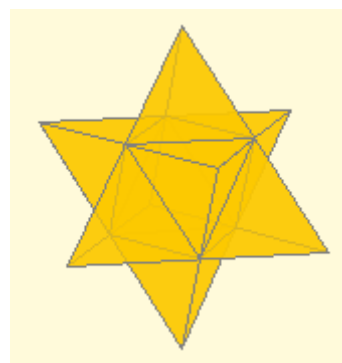
Això és el que passa a la imatge de la dreta on la base és un cercle, per tant, no és un poliedre, però, a més a més, la cara lateral no és plana. (Recorda que un polígon és pla)

Un **angle diedre** és la regió de l'espai delimitada per dos semiplans.
Un angle diedre és **convex** si és menor que un angle pla i, en cas contrari, es diu que és **còncav**

Els poliedres poden ser **convexos** o **còncavs**. És convex si tots els angles diedres són convexos. N'hi ha prou que hi hagi un angle diedre que sigui més gran que un pla perquè el poliedre sigui còncav.



Poliedre convex

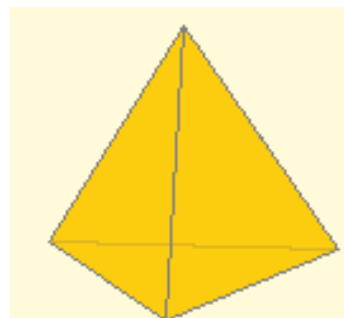


Poliedre còncav

Exercici resol't: El poliedre de la figura de la dreta és el tetraedre i...

- a) tots els tetraedres són convexos
- b) té quatre cares i és còncav
- c) és un cos rodó

Solució: **a)** perquè té tots els angles diedres convexos.



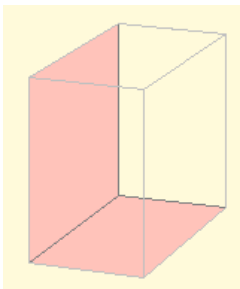
1. Poliedres

Elements d'un poliedre.

En un poliedre podem distingir els següents elements:

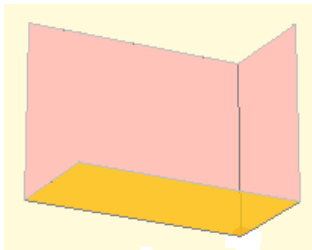
- **Cares:** són els polígons que formen el poliedre.

A més podem esmentar els **angles diedres** delimitats per dues cares que es tallen. N'hi ha tants com a **nombre d'arestes**.

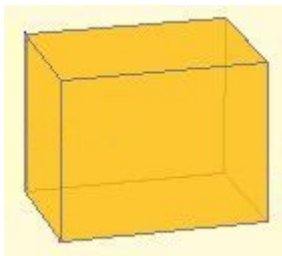


A la figura es mostra un angle diedre.

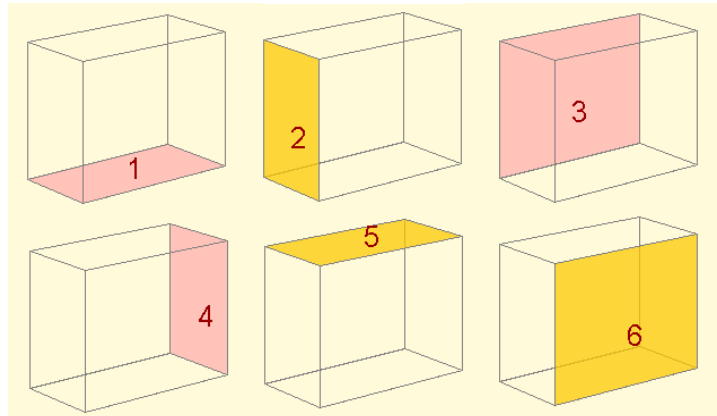
I els **angles poliedres** determinats per les cares que incideixen en un mateix vèrtex. N'hi ha tants com a **nombre de vèrtexs**.



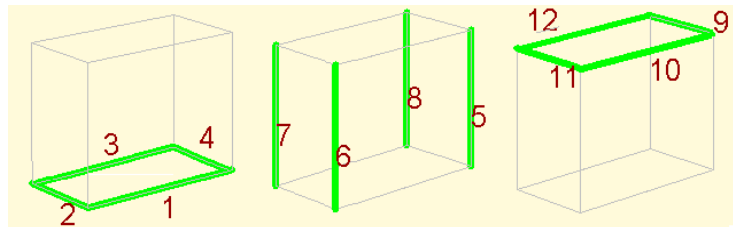
A sobre es mostra un angle poliedre.



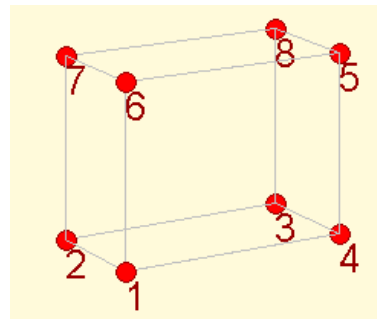
En aquesta figura (ortoedre) trobem **12** angles diedres i **8** angles poliedres.



- **Arestes:** són els segments en els quals s'intersequen (es tallen) les cares.



- **Vèrtexs:** són els punts on s'intersequen les arestes.



Vèrtexs d'un poliedre

Cossos geomètrics.

2. Tipus de poliedres

Prismes

Un prisma és un poliedre determinat per:

- les **bases**: dues cares paral·leles que són polígons iguals.
- tantes **cares laterals**, que són paral·lelograms, com costats tenen les bases.

Als prismes se'ls classifica segons el nombre de costats de les seves bases: triangular (3 costats), quadrangular (4 costats), pentagonal (5 costats), hexagonal (6 costats), etc.

L'**altura** del prisma és la distància entre les bases. Si l'altura coincideix amb les arestes laterals, el prisma és recte; en cas contrari, és oblic.

Les cares laterals dels prismes rectes són rectangles.

Un prisma és **convex** o **còncav** si respectivament les seves bases són polígons convexos o còncavs.

Prismes regulars.

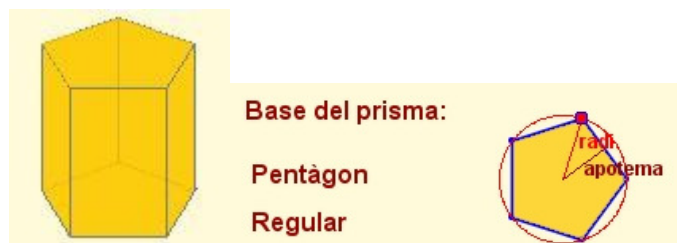
Un prisma recte és **regular** si les seves bases són polígons regulars.

Recorda:

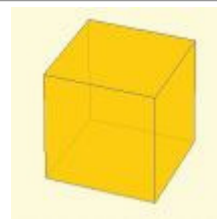
- un polígon és regular si té tots els seus costats i angles iguals.
- tot polígon regular es pot **inscriure** en una circumferència

En ser les bases polígons regulars, podem identificar el radi de la circumferència circumscriu i l'apotema.

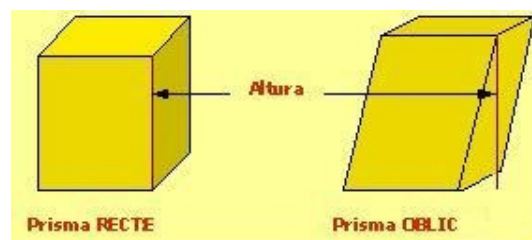
Per exemple, en un prisma pentagonal regular



La base és un pentàgon regular. Es mostra l'apotema i el radi de la circumferència circumscriu

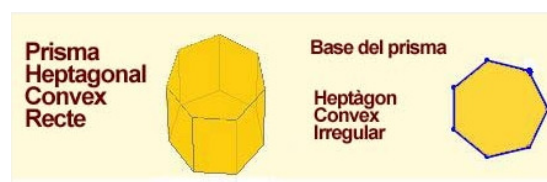


Prisma amb base de 4 costats



Prisma RECTE

Prisma OBLIC



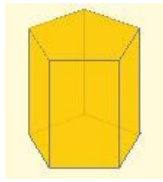
Prisma Heptagonal Convex Recte

Base del prisma

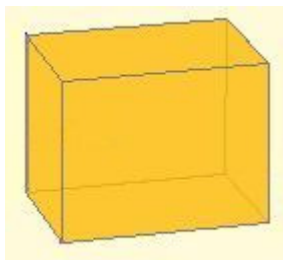
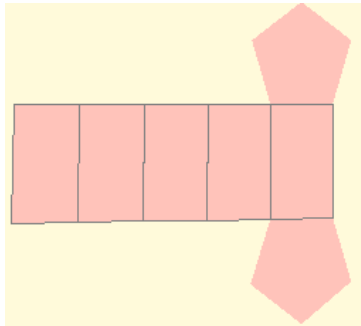
Heptàgon Convex Irregular



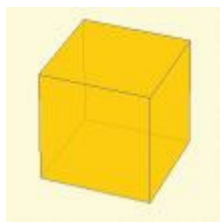
Prisma Hexagonal Regular



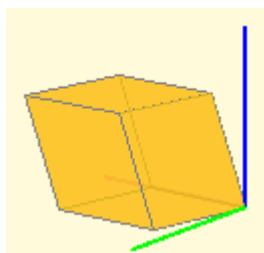
Prisma recte pentagonal i el seu desenvolupament



Ortoedre: les cares són rectangles. (Orto=perpendicular; edre=cara)



Cub: les cares són quadrats. (És un cas particular d'ortoedre)



Romboedre: les cares són rombes (Les 6 cares són iguals)

2. Tipus de Poliedres

Desenvolupament d'un prisma.

Tots els prismes són desenvolupables: és a dir, les seves cares es poden col·locar en un pla, i amb plects es pot construir el prisma.

El desenvolupament d'un prisma recte es compon de les seves dues bases i d'un rectangle que té tantes divisions com nombre de cares laterals.

En la figura de l'esquerra es pot observar un prisma recte pentagonal i el seu desenvolupament.

Com seria el desenvolupament d'un prisma oblic?

Paral·lelepípedes.

Els paral·lelepípedes són prismes tals que **totes** les seves cares són paral·lelograms.

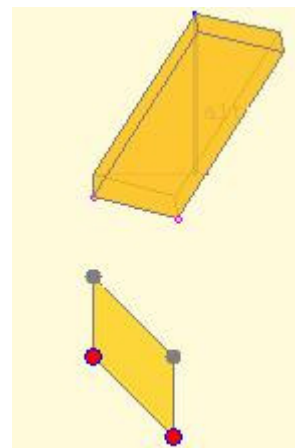
Són prismes **quadrangulars**.

És **recte** si l'altura coincideix amb les arestes, en cas contrari, són **oblics**.

Entre ells en destaquem quatre en particular:

- Ortoedre: les seves cares són rectangles.
- Cub: les seves cares són quadrats.
- Romboedre: les seves cares són rombes.
- Romboiedre: les seves cares són romboïdes.

En la figura de sota, es mostra aquest últim amb un detall de la base.



Preguntes tipus test sobre prismes resoltes

1. En els prismes inclinats:
 - a. Totes les cares són rectangulars.
 - b. Alguna cara pot ser un rectangle.
 - c. Cap cara pot ser rectangular.

b) Les cares dels prismes han de ser paral·lelograms i, en particular, pot tenir alguna cara rectangular.
2. Un ortoedre té:
 - a. Totes les seves cares pentagonals.
 - b. Totes les seves cares iguals.
 - c. Totes les seves cares perpendiculars entre sí.

c) Totes les cares del ortoedre són rectangles i, per tant, són perpendiculars.
3. Un cub és:
 - a. Un pentaedre.
 - b. Un tetraedre.
 - c. Un hexaedre.

c) Té 6 cares. (Recorda: "edre" significa cara i "hexa" sis)
4. Tots els prismes tenen:
 - a. El doble de vèrtexs que de costats té una base
 - b. El mateix nombre de vèrtexs que de costats té una base
 - c. Tants vèrtexs com nombre de costats d'una base més dos.

a) Els vèrtexs del prisma estan a les dues bases que té.
5. Si les cares laterals d'un prisma són rectangles:
 - a. És recte.
 - b. És oblic.
 - c. És un ortoedre

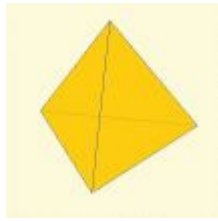
a) L'única possibilitat perquè totes les cares laterals siguin rectangles és que el prisma sigui recte.
6. Els paral·lelepípedes:
 - a. Poden ser prismes triangulars.
 - b. Han de ser prismes quadrangulars.
 - c. No tenen perquè ser prismes quadrangulars.

b) Perquè totes les seves cares són paral·lelograms (quatre costats).
7. Si les bases d'un prisma són rectangles:
 - a. Pot ser un romboedre.
 - b. És recte.
 - c. Pot ser oblic.

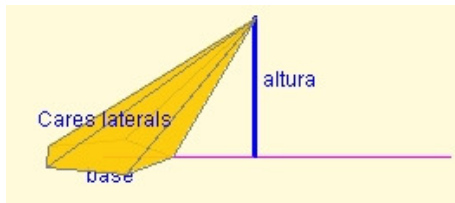
c) La base pot ser rectangular i l'altura NO coincidir amb l'aresta.
8. Un prisma pentagonal té:
 - a. Quinze cares, deu arestes i set vèrtexs.
 - b. Deu cares, set arestes i quinze vèrtexs
 - c. Set cares, quinze arestes i deu vèrtexs.

c) El nombre de cares laterals coincideix amb el de costats de les bases. Si li afegim les 2 bases, el total és 7 cares.

2. Tipus de Poliedres



Piràmide de base triangular



Altura d'una piràmide

Piràmides.

Una piràmide és un poliedre determinat per:

- Una cara poligonal denominada base.
- Tantes cares **triangulars** com costats té la base.

El punt on convergeixen tots els triangles es denomina vèrtex o cúspide.

L'altura d'una piràmide és la distància del vèrtex a la base.

Una piràmide és **convexa** o **còncava** si la seva base és un polígon convex o còncav respectivament.



La definició de piràmide recta o obliqua és una mica més complexa que en el cas dels prismes i és relativa al centre de gravetat o centroide del polígon base.

Piràmides regulars.

Una piràmide és **regular** si totes les cares laterals són iguals.

Las cares laterals d'una piràmide regular són triangles isòsceles.



L'**apotema** és l'altura dels triangles isòsceles de les cares de la piràmide. **NO** s'ha de confondre amb l'altura de la piràmide.

A l'**altura** d'aquests triangles se l'anomena **apotema** de la piràmide.

La base és un polígon regular i, per tant, podem identificar el radi de la circumferència circumscrita i l'apotema de la base.



Apotema i radi de la circumferència circumscrita en una piràmide de base quadrada

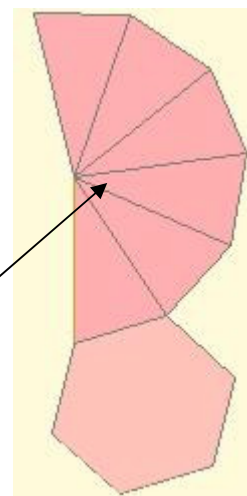
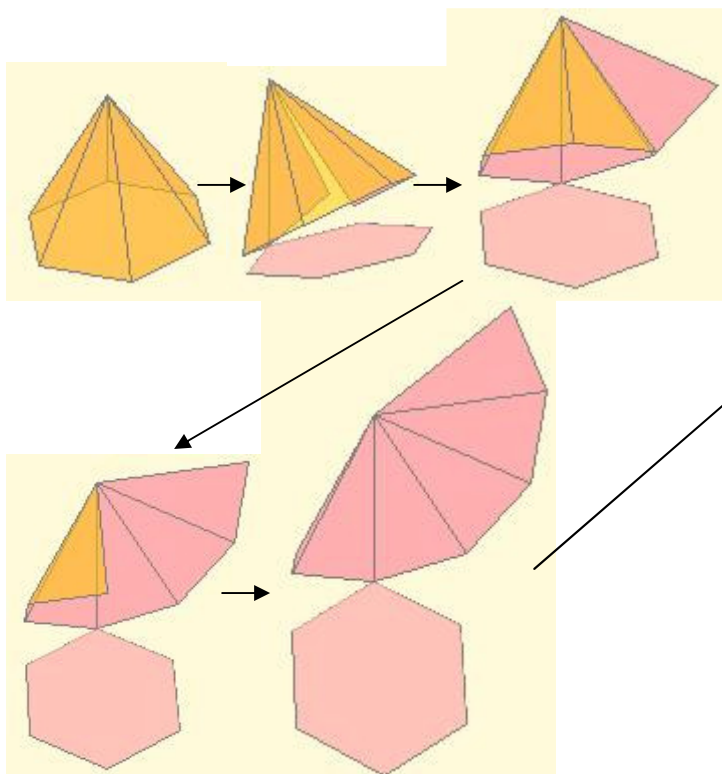
Cossos geomètrics.

2. Tipus de poliedres

Desenvolupament d'una piràmide.

Totes las piràmides són desenvolupables, és a dir, les seves cares es poden col·locar en un pla i mitjançant plects es pot construir la piràmide.

En les imatges es pot observar com s'obté un desenvolupament d'una piràmide regular.



Desenvolupament complet d'una piràmide hexagonal

Qüestió: Com seria el desenvolupament d'una piràmide recta no regular? I el d'una obliqua?

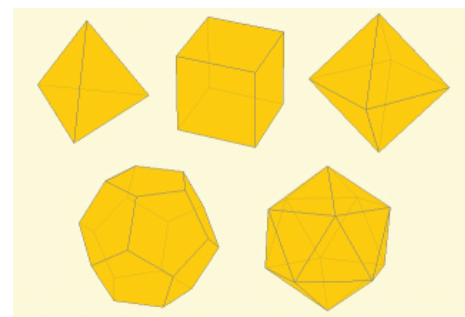
Poliedres regulars.

Un poliedre és **regular** si totes les seves cares són iguals i en cada vèrtex incideixen el mateix nombre de cares i arestes.

Només hi ha cinc poliedres regulars convexos: el tetraedre, el cub, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre.

Als poliedres convexos regulars també se'ls anomena **sòlids platònics**, perquè a la Grècia clàssica els va estudiar Plató.

Tetraedre Cub Octaedre



Dodecaedre Icosaedre

Sòlids platònics

Poliedre regular	Cares	Vèrtexs	Arestes
Tetraedre	4	4	6
Cub	6	8	12
Octaedre	8	6	12
Dodecaedre	12	20	30
Icosaedre	20	12	30

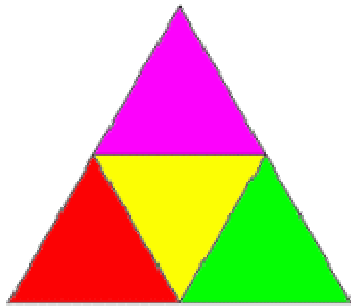
2. Tipus de Poliedres

Desenvolupament de poliedres regulars.

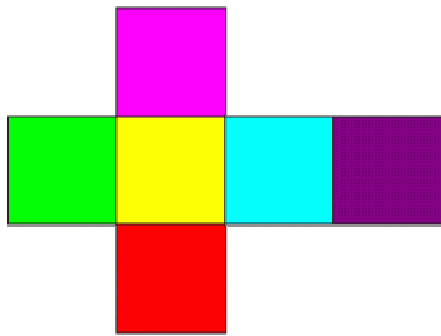
Tots els poliedres regulars són desenvolupables, és a dir, les seves cares es poden col·locar en un pla i mitjançant plecs es poden construir.

A les imatges podem observar alguns dels desenvolupaments possibles de cada un dels poliedres convexos regulars.

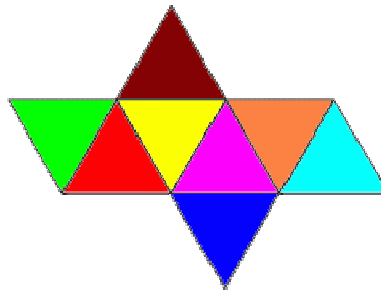
Recorda que als poliedres convexos regulars se'ls anomena també **sòlids platònics**, perquè Plató els va estudiar a la Grècia clàssica.



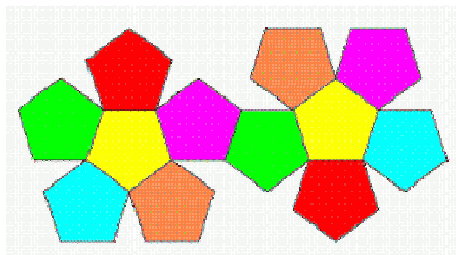
Desenvolupament del tetraedre



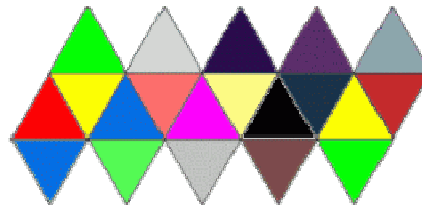
Desenvolupament del cub



Desenvolupament del octaedre



Desenvolupament del dodecaedre



Desenvolupament de l'icosaedre

Preguntes tipus test sobre prismes regulars resoltes

1. En l'octaedre incideixen en cada vèrtex:
 - a. Tres cares.
 - b. Quatre cares.
 - c. Cinc cares.
 2. Poliedres regulars amb cares triangulars n'hi ha:
 - a. Tres.
 - b. Un.
 - c. Dos.
- a) El tetraedre, l'octaedre i l'icosaedre.

Cossos geomètrics.

2. Tipus de poliedres

Relació d'Euler.

Euler va demostrar que en un poliedre es compleix la relació:

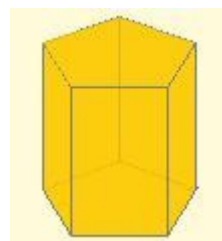
$$C + V = A + 2$$

essent C: nombre de cares, V: nombre de vèrtexs i A: nombre d'arestes del prisma.



Leonhard Euler

Observa l'exemple de com es compleix la relació d'Euler:



Prisma de base pentagonal:
 $C = 7$; $V = 10$; $A = 15$
 $C + V = 17 = A + 2$

3. Cossos rodons

Cilindre.

Un **cilindre recte** és un cos de revolució que s'obté en girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats. La recta en la qual se situa el costat sobre el que gira s'anomena **eix de rotació** i el costat paral·lel a ell és la **generatriu**.

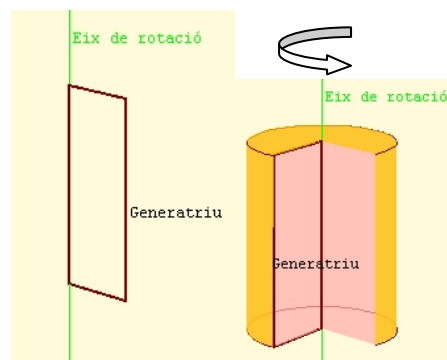
En un cilindre distingim la **superfície lateral** i **dues bases** que són dos cercles iguals.

L'altura del cilindre és la distància entre les dues bases. En un cilindre recte l'altura i la generatriu mesuren el mateix.

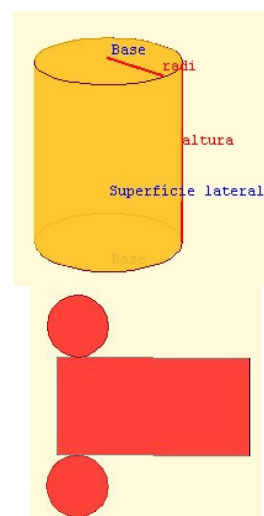
Desenvolupament del cilindre.

La superfície del cilindre és desenvolupable en el pla. Aquest desenvolupament es compon de:

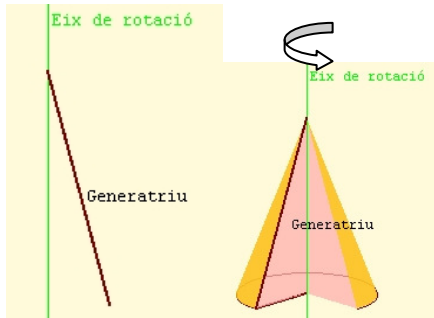
- dos cercles iguals, el radi dels quals és el radi del cilindre: r .
- un rectangle la base del qual té longitud igual al perímetre del cercle de les bases: $2\pi r$, i altura la del cilindre.



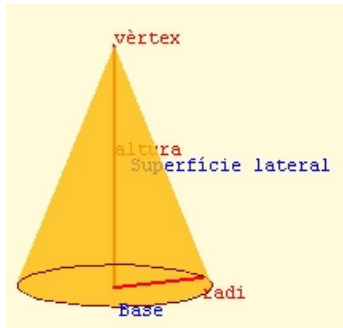
Generació del cilindre



Desenvolupament del cilindre



Generació del con



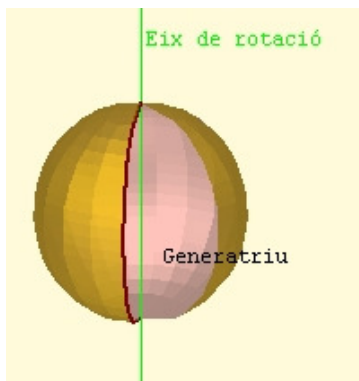
Elements del con

Investiga

Com seria el desenvolupament d'un con inclinat?

Pots consultar en els continguts del "Proyecto: El metro", en concret mira l'objecte 48: "Conos generalizados".

http://descartes.cnice.mec.es/web_HEDA/Elmetro/



Generació de l'esfera

3. Cossos rodons

Con.

Un **con recte** és un cos de revolució que s'obté en girar un triangle rectangle al voltant d'un dels catets. La recta en la qual se situa el costat sobre el que gira s'anomena **eix de rotació** i la hipotenusa és la **generatriu**.

En un con distingim la **superfície lateral** i la **base** que és un cercle. El punt on convergeixen les generatrius és el **vèrtex**.

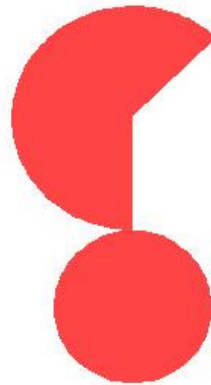
L'altura del con recte és la distància del vèrtex a la base.

Desenvolupament del con.

Un con és un sòlid de revolució que es pot desenvolupar en el pla.

El desenvolupament de la seva cara lateral és un sector circular i la base és un cercle.

El radi del sector circular és la generatriu del con i la longitud del seu arc és el perímetre de la base: $2\pi r$, on r és el radi d'aquesta.



Desenvolupament del con

Esfera.

L'esfera és un cos de revolució que s'obté en girar un semicercle (o un cercle) al voltant del diàmetre. La recta en la qual se situa aquest, és l'eix de revolució i la semicircumferència la generatriu.

La superfície esfèrica **no és desenvolupable** en el pla.

Preguntes tipus test sobre cossos rodons resoltes

1. Un con:

- a. No té base.
- b. Té dues bases.
- c. Té una base.

c) Un con té una base que és un cercle.

2. Un con:

- a. No té cap vèrtex.
- b. Té diversos vèrtexs.
- c. Té un vèrtex.

c) És el punt on convergeixen les generatrius.

3. Un cilindre s'obté en girar:

- a. Una circumferència al voltant d'un diàmetre.
- b. Un triangle rectangle al voltant d'un catet.
- c. Un rectangle al voltant d'un costat.

c) Un cilindre recte és un cos de revolució que s'obté en girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats.

4. El desenvolupament de la cara lateral del cilindre és:

- a. Dos cercles
- b. Un sector circular
- c. Un rectangle

c) un rectangle la base del qual té per longitud el perímetre del cercle de les bases: $2\pi r$, i d'altura la del cilindre.

5. La generatriu del con:

- a. És més gran que la seva altura.
- b. És igual que la seva altura.
- c. És menor que la seva altura

a) L'altura és un catet d'un triangle rectangle, la generatriu és la hipotenusa i, per tant, més gran.

6. Un cilindre:

- a. No té base.
- b. Té dues bases.
- c. Té una base.

b) Un cilindre té dues bases que són cercles.

7. Un cilindre:

- a. No és un poliedre.
- b. Segons es miri pot ser un poliedre.
- c. Sí és un poliedre.

a) En un poliedre les cares són polígons. Les bases del cilindre són cercles, que no són polígons.

8. En augmentar el radi d'un con:

- a. No varia el sector circular del seu desenvolupament lateral.
- b. Disminueix el sector circular del seu desenvolupament lateral.
- c. Augmenta el sector circular del seu desenvolupament lateral.

c) La longitud de l'arc és el perímetre de la base: $2\pi r$, on r és el radi d'aquesta.

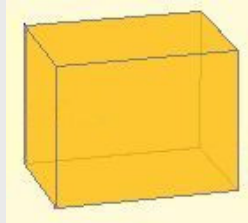
EXERCICIS resolts

Prismes, piràmides, poliedres regulars, relació d'Euler

Sobre PRISMES

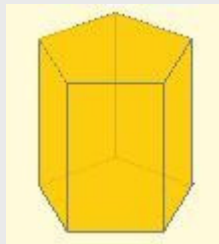
1.1 Dibuixa un prisma recte de base rectangular

En ser un prisma recte les cares laterals són rectangles i donat que les bases són també rectangles, el prisma demanat és el de la figura: un ortoedre



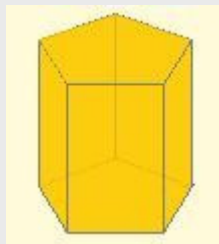
1.2 El nombre d'arestes d'un prisma és 15. Quin polígon són les bases?

El nombre d'arestes d'un prisma és sempre el triple de les arestes de cada base. Si són 15, aleshores cada base en té 5. El prisma és pentagonal.



1.3 Si un prisma té 10 vèrtexs, quin polígon té a les bases?

El nombre de vèrtexs d'un prisma és sempre el doble dels vèrtexs de cada base. Si són 10, aleshores cada base en té 5. El prisma és pentagonal.

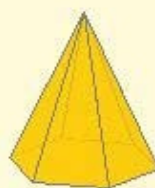


Sobre PIRÀMIDES

2.1 Dibuixa una piràmide hexagonal regular

Una piràmide hexagonal té per base un hexàgon amb els costats iguals. Les cares laterals seran triangles isòsceles. La piràmide demanada és la de la figura, si bé pot tenir l'altura que vulguis.

Piràmide
Hexagonal
Regular



EXERCICIS resolts (continuació)

2.2 Esbrina el polígon de la base d'una piràmide si té 5 vèrtexs.

Una piràmide té sempre un vèrtex més que vèrtexs té la base. Si en total en té 5, la base en té 4. És una piràmide quadrangular.



2.3. Esbrina el polígon de la base d'una piràmide si té 12 arestes.

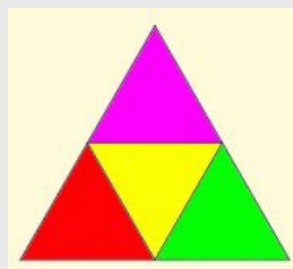
Una piràmide té el doble d'arestes que costats té la base. Si en total té 12 arestes, la base és un hexàgon. És una piràmide hexagonal.



Sobre POLIEDRES REGULARS

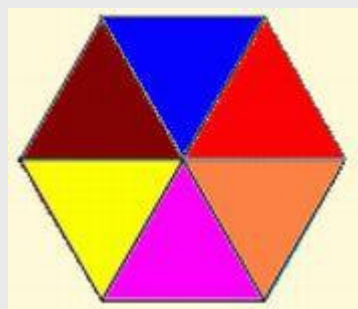
3.1 Dibuixa el desenvolupament d'un tetraedre de 3 cm de costat.

Un tetraedre té quatre cares que són triangles equilàters. A la figura tens el seu desenvolupament pla.



3.2. Pot existir un poliedre regular amb 6 triangles equilàters en cada vèrtex?

No. Fixa't en la figura. Si en un vèrtex incideixen 6 triangles equilàters no podem doblegar-los per formar un poliedre. No tenim marge per construir un angle poliedre.



EXERCICIS resolts (continuació)

Sobre la RELACIÓ D'EULER

4.1 Un poliedre eulerià, pot tenir el mateix nombre de cares que d'arestes?

No és possible. Si és un poliedre eulerià, compleix la relació d'Euler:

$$\text{Cares} + \text{Vèrtexs} = \text{Arestes} + 2.$$

Si el nombre de cares és igual al d'arestes, aleshores el número de vèrtexs hauria de ser 2. Un poliedre de 2 vèrtexs?

4.2. Comprova que es compleix la relació d'Euler en un prisma la base del qual és un heptàgon.

En un prisma heptagonal la base té set vèrtexs, per tant:

- a) Un prisma té el doble de vèrtexs que la base, per tant, 14 vèrtexs.
- b) Un prisma té el triple d'arestes que vèrtexs té la base, per tant, té 21 arestes.
- c) Un prisma té dues cares més (les bases) que vèrtexs té la seva base, per tant, en té 9.

Així doncs, a la relació d'Euler

$$\text{Cares} + \text{Vèrtexs} = \text{Arestes} + 2, \text{ tenim que:}$$

$$9 + 14 = 23 + 2 = 23.$$

Per tant, es verifica la relació d'Euler.

Sòlids de revolució, cilindre, con i esfera

Sobre SÒLIDS DE REVOLUCIÓ

1.1 El cartró d'un rotlle de paper té un diàmetre de 4,6 cm i una altura de 9,7 cm. Quines dimensions té el desenvolupament pla del cartró?

El desenvolupament pla és un rectangle. Les seves dimensions seran:

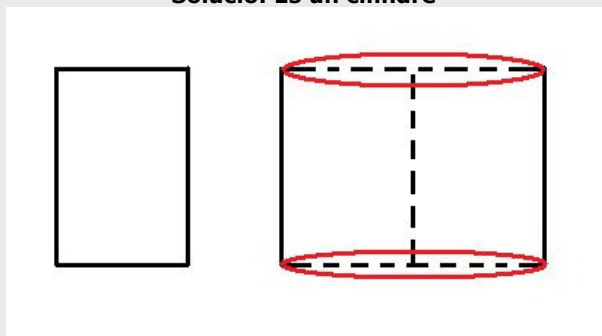
Alçada: l'alçada del rotlle (cilindre): 9,7 cm.

Amplada: el perímetre de la circumferència: diàmetre $\cdot \pi = 4,6 \cdot \pi$.

Si aproximem π per 3,14, obtindrem que l'amplada serà aproximadament 14,44 cm.

1.2 Quina figura de l'espai es genera en fer girar el rectangle inferior al voltant del seu costat dret?

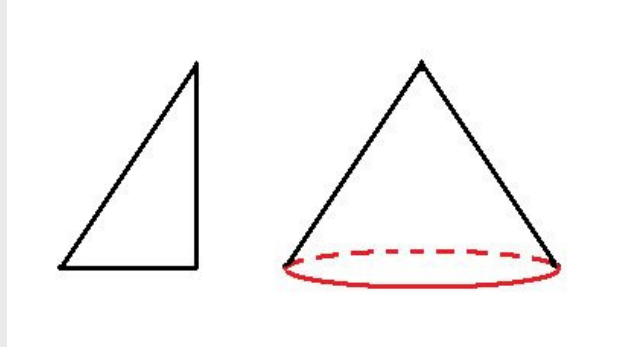
Solució: És un cilindre



EXERCICIS resolts (continuació)

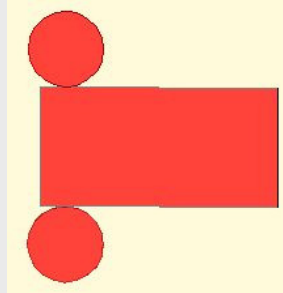
1.3. Quina figura de l'espai es genera en fer girar el triangle dibuixat a sota al voltant de la seva altura?

Solució: És un con



Sobre CILINDRES

2.1. Dibuixa el desenvolupament d'un cilindre de 2 cm de radi i 7 cm d'altura.

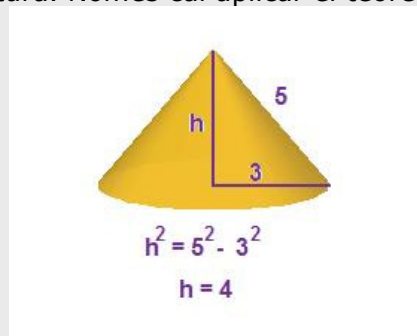


El rectangle té 7 cm d'altura i de base $2 \cdot \pi$ radi cm
El cercle 4 cm de diàmetre

Sobre CONS

3.1. Calcula l'altura d'un con si la generatriu mesura 5 cm i el radi de la base en mesura 3.

A la figura està calculada l'altura. Només cal aplicar el teorema de Pitàgores.



Sobre ESFERES

4.1 Dibuixa el desenvolupament pla de la superfície esfèrica.

No és possible. La superfície esfèrica no és desenvolupable. Si agafes un tros prou gran de la pell d'una taronja i el recolzes a la taula veuràs que en aixafar-lo, es trenca.



Per a practicar

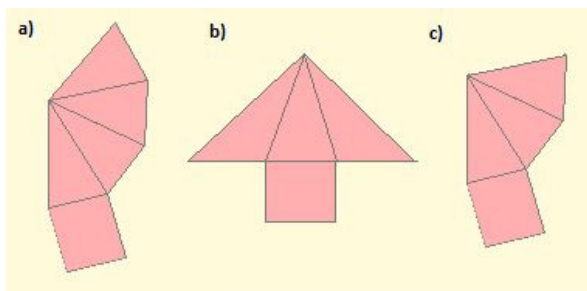
Prismes, piràmides, poliedres regulars, Euler

Exercicis sobre prismes

- 1.1. Dibuixa un prisma oblic de base triangular.
- 1.2. El nombre de vèrtexs d'un prisma és 20, quantes cares té?
- 1.3. Un prisma té 18 arestes. Quin polígon són les bases?
- 1.4. Un prisma té 9 cares. Per tant, és un prisma...
- 1.5. Un prisma té 15 vèrtexs, per tant, les bases són...

Exercicis sobre piràmides

- 2.1. Dibuixa una piràmide irregular de base triangular.
- 2.2. Esbrina el polígon de la base d'una piràmide si té 5 cares laterals.
- 2.3. Esbrina el polígon de la base d'una piràmide si té 8 cares.
- 2.4. Dibuixa el desenvolupament pla d'una piràmide que té totes les seves cares iguals.
- 2.5. Quina de les figures següents és el desenvolupament pla d'una piràmide?



Exercicis sobre poliedres regulars

- 3.1. Dibuixa el desenvolupament d'un octaedre de 2 cm de costat.
- 3.2. Dibuixa el desenvolupament pla d'un cub de 4 cm de costat.
- 3.3. Pot existir un poliedre regular les cares del qual siguin octògons?
- 3.4. Quants costats poden tenir com a màxim les cares d'un poliedre regular?
- 3.5. Quantes cares triangulars poden incidir en un vèrtex d'un polígon regular?
- 3.6. Quantes cares quadrades poden incidir en un vèrtex d'un polígon regular?

Exercicis sobre la relació d'Euler

- 4.1. Un poliedre eulerià, pot tenir el mateix nombre de vèrtexs que d'arestes?
- 4.2. Comprova que es compleix la relació d'Euler en una piràmide la base del qual és un octògon.
- 4.3. Comprova que es compleix la relació d'Euler en l'ícosaedre.
- 4.4. Comprova que es compleix la relació d'Euler en el dodecaedre.
- 4.5. Un poliedre eulerià té 20 cares i 36 vèrtexs. Quantes arestes té?
- 4.6. Un poliedre eulerià té 21 cares i 40 arestes. Quants vèrtexs té?

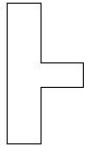


Per a practicar

Sòlids de revolució, cilindres, cons, esferes.

Sobre sòlids de revolució

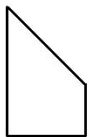
1.1. Dibuixa el cos de revolució que forma la figura de sota en girar al voltant del segment lateral esquerra.



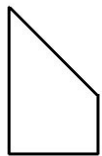
1.2. Quina figura de l'espai es genera en fer girar el trapezi dibuixat a sota al voltant del seu costat dret?



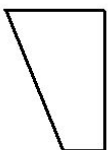
1.3. Quina figura de l'espai es genera en fer girar el trapezi dibuixat a sota al voltant del seu costat dret?



1.4. Quina figura de l'espai es genera en fer girar el trapezi dibuixat a sota al voltant del seu costat esquerra?



1.5. Quina figura de l'espai es genera en fer girar el trapezi dibuixat a sota al voltant del seu costat dret?



Sobre cilindres

2.1. Pot ser el desenvolupament pla de la figura inferior, el corresponent a un cilindre?



2.2. Si agafem un rectangle, s'obté el mateix cilindre si el pleguem per la base que per l'altura?

2.3. Volem construir un pot cilíndric que tingui 7 cm d'altura i el radi de la base mesuri 1,5 cm. Dibuixa el seu desenvolupament pla.

Sobre cons

3.1 Dibuixa el desenvolupament pla d'un con amb radi de la base 5 cm i de generatriu 10 cm.

3.2. Agafem un triangle de base 4 cm i altura 8 cm. En fer-lo girar al voltant de l'altura obtenim un con. Quant mesura la generatriu?

3.3. El desenvolupament pla de la cara lateral d'un con, pot ser un cercle complet?

Sobre esferes

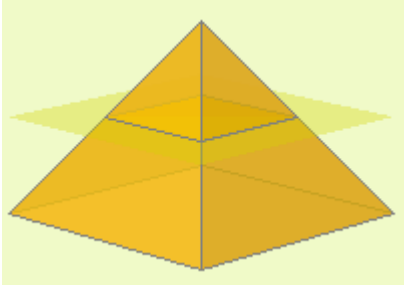
4.1. En fer girar un quart de cercle al voltant d'un dels radis que el limiten, quina figura obtenim?

4.2. En fer girar un cercle al voltant d'un eix exterior a ell, quina figura obtenim?

4.3. Quina forma tenen les gotes d'aigua?

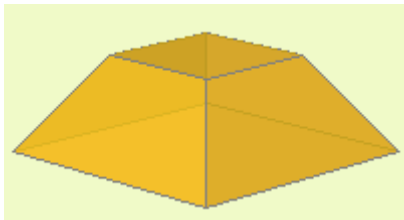


Tronc de piràmide i tronc de con

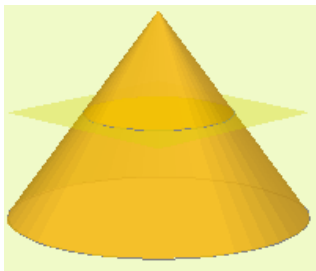


Si una piràmide la tallem amb un pla paral·lel a la base, obtenim una altra piràmide i un altre poliedre anomenat:

tronc de piràmide

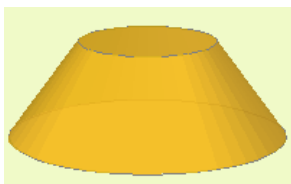


El tronc de piràmide té dues bases que són polígons semblants i les cares laterals són trapezoides si la piràmide és recta o quadrilàters si és obliqua



Si un con el tallem amb un pla paral·lel a la base, obtenim un altre con i un altre sòlid de revolució anomenat:

tronc de con



El tronc de con té dues bases que són cercles i una cara lateral que té per desenvolupament un sector d'una corona circular

Poliedres no Eulerians

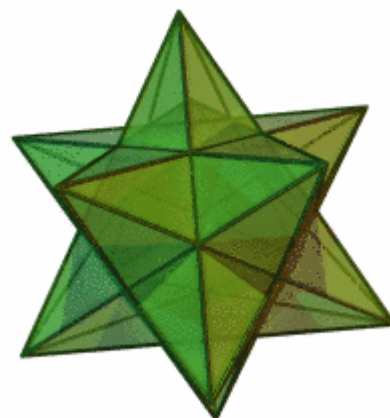
Hi ha poliedres que no compleixen la relació d'Euler:

$$\text{Cares} + \text{Vèrtexs} = \text{Arestes} + 2$$

Són poliedres que tenen "forats".



Poliedres regulars còncaus



Un poliedre còncau es diu que és regular si totes les seves cares són polígons regulars i en cada vèrtex concorren el mateix nombre de cares. Se'ls anomena **sòlids de Kepler-Poinsot**.

Cossos geomètrics.

Recorda el més important

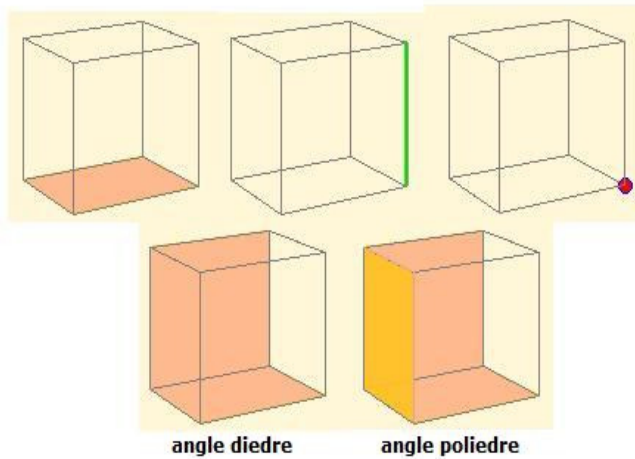
Un poliedre és un cos geomètric tridimensional les cares del qual són polígons.

Elements d'un poliedre

cares

arestes

vèrtexs



Poliedres regulars

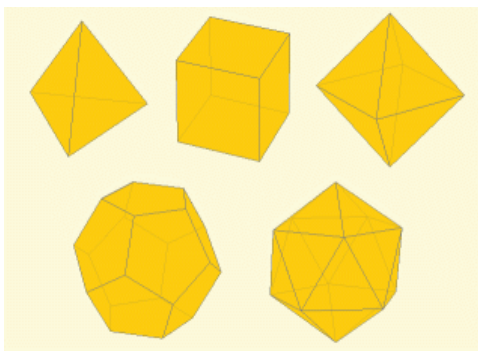
Un poliedre és regular si totes les seves cares són iguals i sobre cada vèrtex incideixen el mateix nombre de cares i d'arestes.

Els poliedres regulars són cinc

Tetraedre

Cub

Octaedre



Dodecaedre

Icosaedre

Cossos rodons

Cilindre, con i esfera són cossos de revolució

Tipus de poliedres.

Prisma inclinat



Les cares laterals són PARAL·LELOGRAMS

Prismes

Piràmide recta



Les cares laterals són TRIANGLES

Piràmides

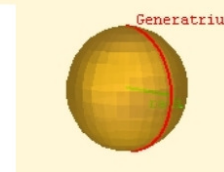
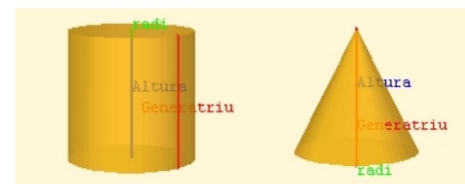
Relació d'Euler



Cares 11, Vèrtexs 18, Arestes 27.
Cares + Vèrtexs = Arestes + 2

Cilindre

Con



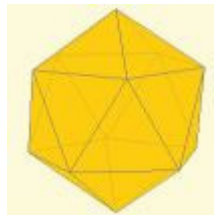
Esfera

Autoavaluació

1. Un prisma hexagonal, quants vèrtexs té?
2. Una piràmide pentagonal, quants vèrtexs té?
3. Un prisma triangular, quantes arestes té?
4. Una piràmide heptagonal, quantes arestes té?
5. Un poliedre convex té 4 cares i 5 vèrtexs, quantes arestes té?
6. Un poliedre convex té 9 cares i 18 arestes, quants vèrtexs té?
7. El poliedre regular de 6 vèrtexs, quin és?
8. El poliedre regular convex de 12 cares, quin és?



9. Com s'anomena el poliedre representat en aquesta figura?



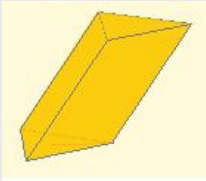
10. Indica si el sòlid de la figura és desenvolupable.



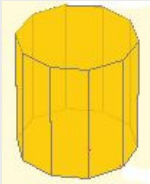
Solucions dels exercicis per a practicar

PRISMES

1.1 En ser un prisma les cares laterals són paral·lelograms. Les bases són triangles i al ser oblic han d'estar desplaçades.



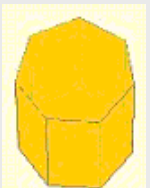
1.2. El nombre de vèrtexs d'un prisma és sempre el doble dels vèrtexs de cada base. El prisma és decagonal i, per tant, té 12 cares.



1.3 El nombre d'arestes d'un prisma és sempre el triple de les arestes de cada base. El prisma és hexagonal.



1.4 El nombre de cares d'un prisma és el nombre de costats de la base més dos. És un prisma heptagonal.



1.5 No hi ha cap prisma que pugui tenir un nombre senar de vèrtexs.

PIRÀMIDES

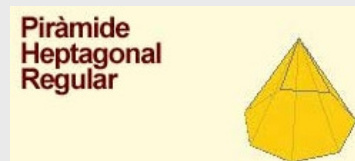
2.1



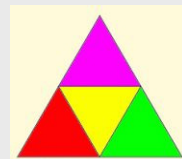
2.2 Una piràmide té tantes cares laterals com costats té la base. És una piràmide pentagonal.



2.3 Una piràmide té sempre una cara més que costats té la base. És una piràmide heptagonal.



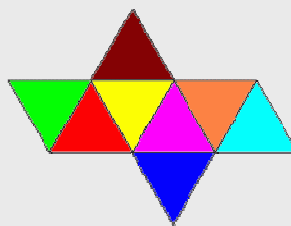
2.4 L'única piràmide triangular amb totes les cares iguals és el tetraedre.



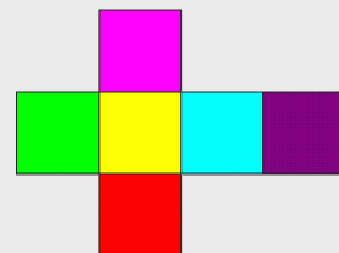
2.5 Si la base és rectangular, ha de tenir quatre cares que siguin triangles. L'única opció és la **a**).

POLIEDRES REGULARS

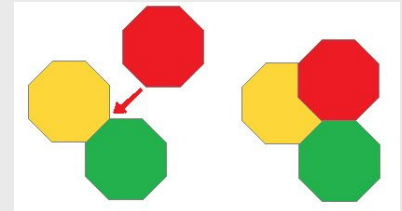
3.1 Un tetraedre té vuit cares que són triangles equilàters.



3.2

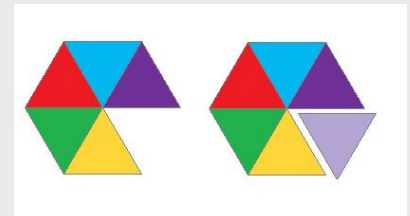


3.3 Per formar un angle poliedre fan falta al menys tres cares. Si volem que hi hagi tres cares que siguin octògons se superposen. No és possible.

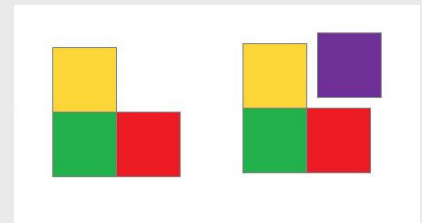


3.4 El nombre màxim de costats és cinc ja que a partir de l'hexàgon no és possible construir un angle poliedre. Per això, només hi ha poliedres regulars amb les cares triangulars, quadrades i pentagonals.

3.5 El nombre màxim de cares triangulars és cinc; un sisè triangle ja no permet construir un angle poliedre. Amb tres triangles es forma el tetraedre, amb quatre l'octaedre i amb cinc l'icosaedre.



3.6 El nombre màxim de cares quadrades és tres; amb un quart quadrat ja no es pot construir un angle poliedre. Amb tres quadrats es forma el cub.



RELACIÓ D'EULER

4.1 No és possible. Si és un poliedre eulerià, compleix la relació d'Euler:

$Cares + Vèrtexs = Arestes + 2$.
Si el nombre de vèrtexs és igual al d'arestes, aleshores el nombre de cares hauria de ser 2. Un poliedre de 2 cares?

4.2 Aplicant la relació d'Euler Cares + Vèrtexs = Arestes + 2, tenim que:

$$9 + 9 = 18 \text{ i } 16 + 2 = 18.$$

4.3 L'icosaedre té 20 cares, 12 vèrtexs i 30 arestes.

Així, amb la relació d'Euler Cares + Vèrtexs = Arestes + 2, tenim que:

$$20 + 12 = 32 \text{ i } 30 + 2 = 32.$$

4.4 El dodecaedre té 12 cares, 20 vèrtexs i 30 arestes.

Així, amb la relació d'Euler Cares + Vèrtexs = Arestes + 2, tenim que:

$$12 + 20 = 32 \text{ i } 30 + 2 = 32.$$

4.5 Si $C + V = A + 2$, tenim que:

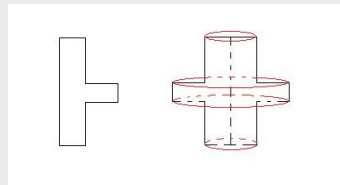
$20 + 36 = \text{Arestes} + 2$. Per tant, $\text{Arestes} = 20 + 36 - 2 = 54$. Té 54 arestes.

4.6 Si $C + V = A + 2$, tenim que:

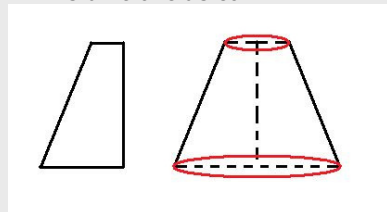
$21 + \text{Vèrtexs} = 40 + 2$. Per tant, $\text{Vèrtexs} = 40 + 2 - 21 = 21$. Té 21 vèrtexs.

SOBRE SÒLIDS DE REVOLUCIÓ

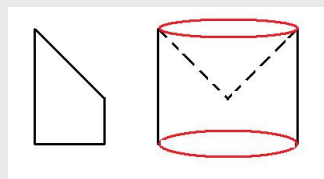
1.1



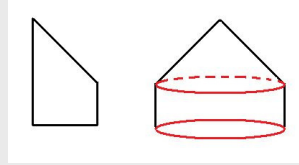
1.2 És un tronc de con.



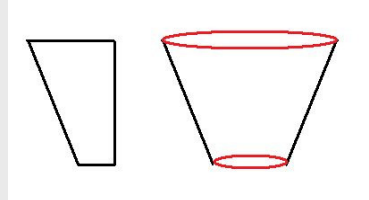
1.3 Un cilindre al qual li hem tret un con en la part superior.



1.4 Un cilindre amb un con en la part superior.



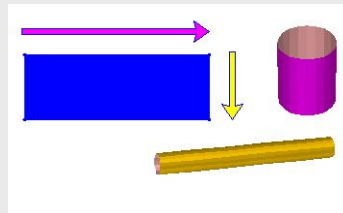
1.5 Un tronc de con, que per la seva orientació té la forma d'un got.



SOBRE CILINDRES

2.1 No és possible. La longitud de la base del rectangle ha de coincidir amb la longitud de la circumferència de la base del cilindre i està clar que la de la figura és menor.

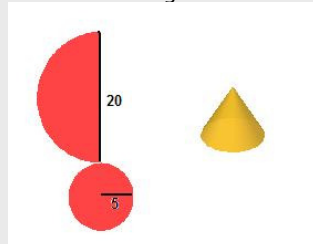
2.2 No, el cilindre és diferent llevat de que l'altura i la base del rectangle siguin la mateixa, és a dir, que de fet sigui un quadrat.



2.3 L'altura del rectangle és 7 cm i la base és la longitud de la circumferència de la base del cilindre: $2 \cdot \pi \cdot \text{radi}$, essent aquí el radi 1,5 cm. Hauràs d'aproximar el valor de π .

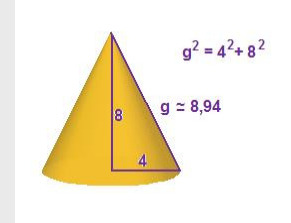
SOBRE CONS

3.1 Donat que el radi de la base és 5, la longitud de la circumferència és $2 \cdot \pi \cdot 5$. La cara lateral del con és un sector circular l'arco del qual ha de mesurar la longitud anterior.

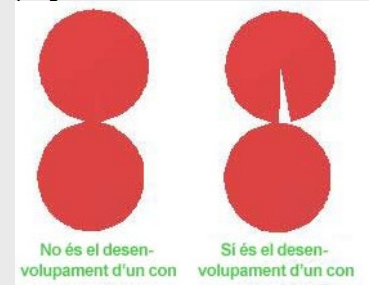


La generatriu és el radi del sector que s'ha de dibuixar. Donat que aquest radi és 10, $2 \cdot \pi \cdot 5$ és justament la meitat, per tant, cal dibuixar mig cercle de radi 10.

3.2 A la figura està calculada l'altura. Només cal aplicar el teorema de Pitàgores.

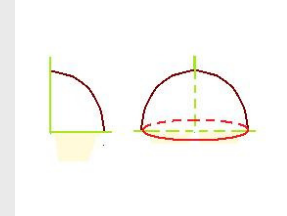


3.3 No, no és possible. Cal que falti almenys un tros perquè puguem construir la cara lateral plegant-lo.

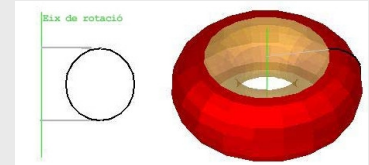


SOBRE ESFERES

4.1 S'obté una semiesfera.



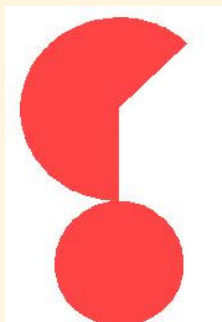
4.2 S'obté el cos que col·loquialment identifiquem com a un "donut". Matemàticament, aquesta figura és un "tor".



4.3 Són esfèriques.

Solucions de l'AUTOAVALUACIÓ

1. Un prisma hexagonal, quants vèrtexs té? **12 vèrtexs.**
2. Una piràmide pentagonal, quants vèrtexs té? **6 vèrtexs**
3. Un prisma triangular, quantes arestes té? **9 arestes**
4. Una piràmide heptagonal, quantes arestes té? **14 arestes.**
5. Un poliedre convex té 4 cares i 5 vèrtexs, quantes arestes té? **7 arestes**
6. Un poliedre convex té 9 cares i 18 arestes, quants vèrtexs té? **11 vèrtexs**
7. Un poliedre regular de 6 vèrtexs, quin és? **Octaedre**
8. El poliedre regular convex de 12 cares, quin és? **Dodecaedre**
9. Com s'anomena el poliedre representat en aquesta figura? **Icosaedre**
10. Indica si el sòlid de la figura és desenvolupable. **Sí**



No oblidis enviar les activitats al tutor.