Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Inequacions

Desigualtats

Direm que $a < b$ “a és menor que b” si $b - a$ és un nombre positiu.
Gràficament, a queda a l’esquerra de b.

Direm que $a > b$ “a major que b” si $a - b$ és un nombre positiu.
Gràficament, a queda a la dreta de b.

Direm que $a \leq b$ “a és menor o igual que b” si $a < b$, o bé, $a = b$.

Direm que $a \geq b$ “a és major o igual que b” si $a > b$, o bé, $a = b$.

Exemples:

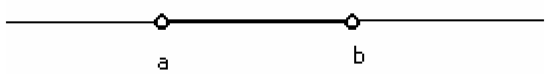
$-5 < 7$ $\qquad$ $-3 > -10$ $\qquad$ $-2 \leq 3$ $\qquad$ $\frac{-1}{3} \geq \frac{-1}{2}$

Propietats de les desigualtats.

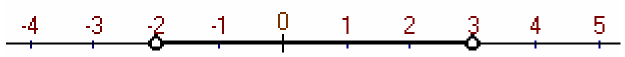
Propietat 1:	Propietat 2:	Propietat 3:
Si $a < b$, aleshores, $a + c < b + c$.	$\begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix}$, aleshores, $a \cdot c < b \cdot c$	$\begin{matrix} a < b \\ c < 0 \end{matrix}$, aleshores, $a \cdot c > b \cdot c$

Intervals

Siga $a < b$
Definim interval obert d’extrems a, b i ho representem per $]a,b[$ al conjunt:
$]a,b[= \{x \in R \ / \ a < x < b\}$ és a dir, tots els nombres reals que són majors que a i menors que b.

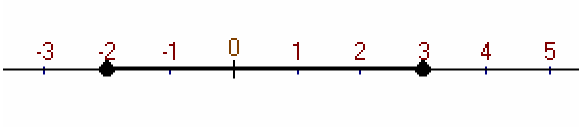


Exemple: Interval obert $]-2, 3[$



Definim interval tancat d’extrems a, b i ho representem per $[a,b]$ al conjunt:
$[a,b] = \{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$ és a dir, tots els nombres reals que són majors o igual que a i menors o igual que b.

Exemple: L'interval tancat $[-2, 3]$



Definim interval obert d'extrems a, $+\infty$ i ho representarem $]a,+\infty[$ al conjunt:
$]a,+\infty[= \{x \in R \ / \ x > a\}$, és a dir, els nombres reals majors que a.

Definim interval tancat d'extrems a, $+\infty$ i ho representarem $[a,+\infty[$ al conjunt:
$[a,+\infty[= \{x \in R \ / \ x \geq a\}$, és a dir, els nombres reals majors o igual que a.

Definim interval obert d'extrems $-\infty$, a i ho representem $]-\infty,a[$ al conjunt:
$]-\infty,a[= \{x \in R \ / \ x < a\}$, és a dir, els nombres reals menors que a.

Definim interval tancat d'extrems $-\infty$, a i ho representem $]-\infty,a] =$ al conjunt:
$]-\infty,a] = \{x \in R \ / \ x \leq a\}$, és a dir, els nombres reals menors o igual que a.

Inequacions de primer grau amb una incògnita.

Una inequació és una desigualtat algebraica on apareixen lletres (incògnites) de valor desconegut. Si només hi ha una incògnita i és de grau 1 la inequació és de primer grau amb una incògnita.

Procediment per a resoldre una inequació de primer grau amb una incògnita.

- Eliminar denominadors, multiplicant ambdues parts de la inequació pel mínim comú múltiple dels denominadors (propietat 2 o 3).
- Eliminar parèntesis. (propietat distributiva).
- Transposició de termes, per aconseguir una inequació d'una de les formes següents:
  $a \cdot x < b$, $a \cdot x \leq b$, $a \cdot x > b$, o bé $a \cdot x \geq b$ (propietat 1)
- Aïllar la incògnita. (Propietat 2 o 3)
- Donar l'expressió analítica, per intervals i gràfica de la solució.

Exercicis d'autoaprenentatge:
a) Resoleu la inequació
$2(x-3) \leq 4x+2$
Eliminem el parèntesi efectuant operacions:
$2x-6 \leq 4x+2$
Transposem els termes de la inequació (propietat 1):
$2x-4x \leq 2+6$

$-2x \leq 8$

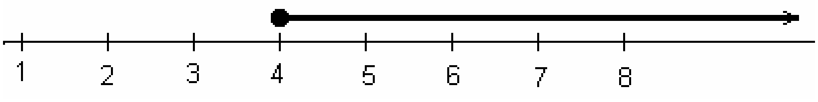
Aïllem la incògnita. Notem que el coeficient de la incògnita és negatiu, per tant aplicarem la propietat 3. La desigualtat canvia de sentit:

$$x \geq \frac{8}{-2}$$

Aleshores:

$x \geq -4$ és la solució analítica.

$[-4, +\infty[$ és la solució per intervals.



és la solució gràfica

b) Resoleu la inequació

$2x + 3 > 2(x + 3)$

Eliminem el parèntesi efectuant operacions:

$2x + 3 > 2x + 6$

Transposant els termes de la inequació:

$2x - 2x > 6 - 3$

$0 > 3$

Aquesta desigualtat és falsa per tant la inequació no té solució.

Nota: si la desigualtat fora vertadera qualsevol nombre real seria solució de la inequació.

c) Resoleu la inequació

$$\frac{5x-3}{6} + \frac{x-5}{18} < \frac{x+1}{3}$$

Eliminem els denominadors multiplicant ambdues parts de la inequació pel mínim comú múltiple dels denominadors $\text{mcm}(3, 6, 18) = 18$

$$18\left(\frac{5x-3}{6} + \frac{x-5}{18}\right) < 18\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

$3(5x - 3) + x - 5 < 6(x + 1)$

Eliminem els parèntesis:

$15x - 9 + x - 5 < 6x + 6$

Transposem els termes:

$15x + x - 6x < 6 + 9 + 5$

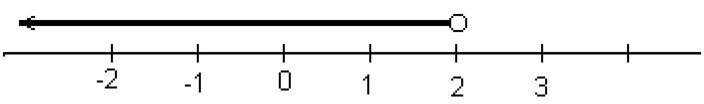
$10x < 20$

Aïllem la incògnita. Notem que el coeficient de la incògnita és positiu. (propietat 2)

$$x < \frac{20}{10}$$

$x < 2$ és la solució analítica.

$]-\infty, 2[$ és la solució amb intervals.



és la solució gràfica

Inequacions de grau major que 1 amb una incògnita.

Mètode de resolució:.

1. Desigualar la inequació a zero.
2. Calcular els zeros o arrels del polinomi.
3. Representar els zeros en la recta real.
4. Calcular el signe del valor del polinomi en cada interval que determinen els zeros.
5. Resoldre la inequació.

Exercicis d'autoaprenentatge:

1. Resoleu la inequació:

$(x+2)^2 \le x+8$

Efectuem operacions:

$x^2+4x+4 \le x+8$

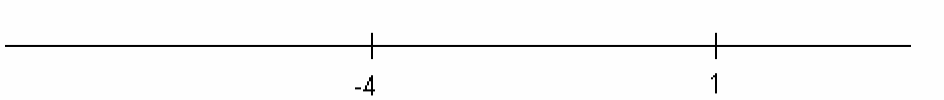
Desigualem a zero la inequació:

$x^2+3x-4 \le 0$

Calculem els zero del polinomi x^2+3x-4

$x^2+3x-4=0$ utilitzant la fórmula de l'equació de segon grau $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\begin{cases}1\\-4\end{cases}$

Representem els zeros en la recta real:



Els zeros han dividit la recta real en tres intervals: $]-\infty,-4[$, $]-4,1[$, $]1,+\infty[$

Estudiem el signe del valor del polinomi x^2+3x-4 en cada interval:

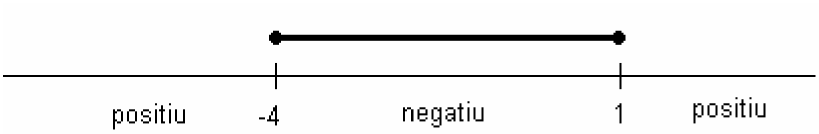
$x=-5$ pertany al primer interval, $(-5)^2+3\cdot(-5)-4=6>0$

$x=0$ pertany al segon interval, $0^2+3\cdot 0-4=-4<0$

$x=2$ pertany al tercer interval, $2^2+3\cdot 2-4=6>0$

$x=-4$ és solució de la inequació ja que és zero del polinomi, $(-4)^2+3\cdot(-4)-4=0$

Aleshores:



La solució és l'interval $[-4,1]$, és a dir, $-4\le x\le 1$

2. Resoleu la inequació: $x^5+6x^4+9x^3>4x^2+12x$

Desigualem la inequació a zero:

$x^5+6x^4+9x^3-4x^2-12x>0$

Utilitzant la Regla de Ruffini i el teorema del residu factoritzem el polinomi

$x^5+6x^4+9x^3-4x^2-12x$

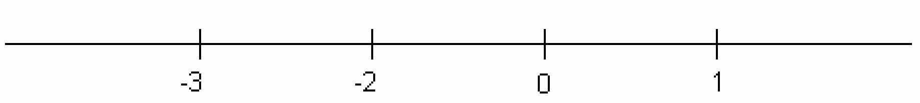
$x^5+6x^4+9x^3-4x^2-12x=x(x^4+6x^3+9x^2-4x-12)$

	1	6	9	-4	-12
1		1	7	16	12
	1	7	16	12	$\boxed{0}$
-2		-2	-10	-12	
	1	5	6	$\boxed{0}$	
-2		-2	-6		
	1	3	$\boxed{0}$		
-3		-3			
	1	$\boxed{0}$			

Aleshores $x^5+6x^4+9x^3-4x^2-12x=x(x-1)(x+2)^2(x+3)$

Els zeros del polinomi són: $x=0,\ x=1,\ x=-2,\ x=-2,\ x=-3$.

Representem els zeros en la recta real:



Els zeros determinen 5 intervals: $]-\infty,-3[,\quad]-3,-2[,\quad]-2,0[,\quad]0,1[,\quad]1,+\infty[$

Estudiem el signe del valor del polinomi $x(x-1)(x+2)^2(x+3)$ en cada interval:

$x=-4$ pertany al primer interval, $(-4)\cdot(-5)\cdot(-2)^2\cdot(-1)<0$

$x=-2'5$ pertany al segon interval, $(-2'5)\cdot(-3'5)\cdot(-0'5)^2\cdot 0'5>0$

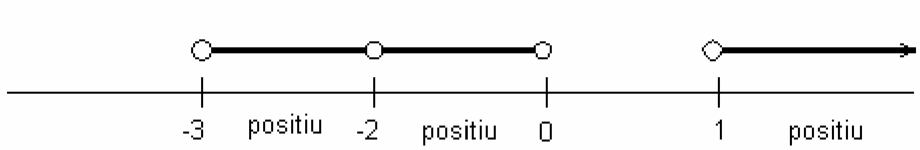
$x=-1$ pertany al tercer interval, $(-1)\cdot(-2)\cdot 1^2\cdot 2>0$

$x=0'5$ pertany al quart interval, $0'5\cdot(-0'5)\cdot(2'5)^2\cdot 3'5<0$

$x=2$ pertany al cinqué interval, $2\cdot 1\cdot 4^2\cdot 5>0$

Els zeros del polinomi no són solucions de la inequació:

Aleshores:



La solució és $]-3,-2[\ \cup\ ]-2,0[\ \cup\ ]1,+\infty[$

És a dir, $-3<x<-2 \quad \vee \quad -2<x<0 \quad \vee \quad x>1$

Inequacions racionals:

Una inequació és racional si té fraccions amb incògnites en el denominador:

Mètode de resolució:
1. Desigualar la inequació a zero.
2. Fer operacions per a que quede una fracció algebraica desigualada a zero.
3. Calcular els zeros o arrels del numerador i denominador de la fracció de l'apartat 2.
4. Representar els zeros anteriors en la recta real.
5. Calcular el signe del valor del polinomi en cada interval que determinen els zeros.
6. Resoldre la inequació. (Hem de notar que no té solució quan el denominador de la fracció és zero)

Exercici d'autoaprenentatge:

Resoleu la inequació: $\frac{x+3}{x-2} \geq 2$

Desigualem a zero:

$\frac{x+3}{x-2} - 2 \geq 0$

Efectuem les operacions en la primera part de la desigualtat:

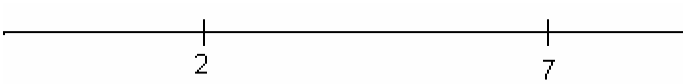
$\frac{x+3-2(x-2)}{x-2} \geq 0$ $\quad \frac{x+3-2x+4}{x-2} \geq 0$ $\quad \frac{-x+7}{x-2} \geq 0$

Calculem els zeros del numerador i del denominador:

$-x+7=0$, aleshores, $x=7$

$x-2=0$, aleshores, $x=2$

Representem els zeros en la recta real.



Determinen 3 intervals: $]-\infty, 2[$, $]2, 7[$ i $]7, +\infty[$

$x=0$ pertany al primer interval el valor de la fracció és $\frac{-0+7}{0-2} < 0$.

$x=3$ pertany al segon interval el valor de la fracció és $\frac{-3+7}{3-2} > 0$.

$x=8$ pertany al tercer interval el valor de la fracció és $\frac{-8+7}{8-2} < 0$

$x=2$ no és solució de la inequació perquè anul·la el denominador.

$x=7$ és solució de la inequació perquè només anul·la el denominador $\frac{-7+7}{7-2} = 0$

Aleshores:

La solució és l'interval $]2, 7]$, és a dir, $2 < x \le 7$

Sistemes d'inequacions amb 1 incògnita:

Un sistema d'inequacions són dues o més inequacions la solució del qual és la intersecció de les solucions de totes les inequacions

Mètode de resolució:
Resoldrem separadament cadascuna de les inequacions.
Determinarem la intersecció de les solucions. (Valors que satisfan totes les inequacions).
Nota: Si no hi ha intersecció la inequació no té solució.

Exercici d'autoaprenentatge

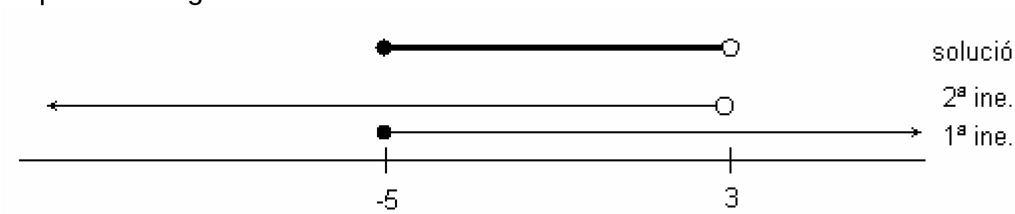
Resoleu el següent sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} 3x+4 \geq x-6 \\ 2x > 5x-6 \end{cases}$$

Resolem les dues inequacions:

$$\begin{cases} 2x \geq -10 \\ -3x > -6 \end{cases} \quad \text{Aïllant les incògnites,} \quad \begin{cases} x \geq -5 \\ x < 3 \end{cases}$$

Representem gràficament les solucions:



Noteu que $x=-5$ és solució d'ambdues inequacions. $x=3$ no és solució perquè només és solució de la primera inequació.

Exercicis proposats:

1. Resoleu les següents inequacions:

a) $5x-1 < 7x+9$
b) $12x+7 \geq 3x-2$
c) $6-8x+3 \leq -9x+7-x$
d) $-x-1+2x > 9-7x+5$
e) $x-(7x-3) < 7-4x-5$
f) $2x \leq 2(x-1)$
g) $3x+4 \geq 3(x-7)$
h) $x-2(1-x) > 7$
i) $2x+3(1-2x) < x+8$
j) $x-\dfrac{x}{5} \geq 30$
k) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{6} < 7+x$
l) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{2x}{15} \geq \dfrac{x+4}{3}$
m) $\dfrac{4x+1}{3} \leq \dfrac{12x-3}{7}$
n) $\dfrac{2x-5}{12} > \dfrac{-x}{4}-\dfrac{5}{3}$
o) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{3}-1 < \dfrac{x}{2}$
p) $\dfrac{2x+4}{3} \geq \dfrac{x}{6}-3$
q) $\dfrac{4x-3}{5}-\dfrac{4x}{3} < \dfrac{2(x-13)}{15}$
r) $\dfrac{4x}{15}-\dfrac{6x+28}{3} \leq 0$
s) $\dfrac{5x+1}{6} > 2-\dfrac{2x+1}{3}$

t) $\frac{x-2}{7}-\frac{x+3}{3}\le\frac{5x}{21}$

2. Resoleu les següents inequacions:

a) $x^2-12x>0$

b) $2x^2-288\le 0$

c) $x^2-2x-8\ge 0$

d) $7x^2-20x-3\le 0$

e) $x(x-1)+x(x-3)<48$

f) $(x-1)^2-(x+3)^2-x^2>7$

g) $4x^2-x>-2$

h) $x^2-10x\le -25$

i) $3x^2>-343$

j) $3x^2\le -343$

k) $7x^2+26>x^2+80$

l) $3(x+1)-x(2x-1)\le 4x-1$

m) $x^2-50-6x>9x$

n) $5x^2<6x+1$

o) $(x-1)^2\ge 25$

p) $3(x-1)(x+2)\le 6x$

3. Resoleu les següents inequacions:

a) $x^4+3x^3-3x^2\le 11x+6$

b) $x^4+6x^3>-9x^2+4x+12$

c) $x^4+x^3-19x^2\ge +49x+30$

d) $x^4+10x^3+37x^2<-60x-36$

e) $x^4-2x^2>-1$

f) $x^4+3x^3-5x^2-3x+4\le 0$

g) $x^4+2x^3-12x^2+14x-5>0$

h) $x^5+6x^4+5x^3\ge +24x^2+36x$

i) $x^5+2x^4-3x^3-8x^2-4x<0$

j) $x^6+2x^5-3x^4-4x^3+4x^2>0$

4. Resoleu les següents inequacions:

a) $\frac{x-4}{x+3}>0$

b) $\frac{2x-10}{x+3}\le 0$

c) $\frac{x+6}{3-x}<0$

d) $\frac{3x-6}{4-x}\ge 0$

e) $\frac{x-3}{x+5}<1$

f) $\frac{x+1}{1-x}\ge 1$

g) $\frac{3}{2x-4}<4$

h) $\frac{3-2x}{x}\le\frac{-5}{3}$

i) $\frac{5x-4}{x+3}-2\ge\frac{2x}{x+3}$

j) $\frac{x}{4-2x}>\frac{3}{4-2x}$

5. Resoleu els següents sistemes d'inequacions:

a) $\begin{cases}5x-4\ge 2x+2\\3x-8\le x+6\end{cases}$

b) $\begin{cases}9x+x<8\\1+3x>2x+4\end{cases}$

c) $\begin{cases}4x+5<7x-2\\x-1<3x-6\end{cases}$

d) $\begin{cases}3x+2\ge x-4\\5-x>-2\end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 15 \le x - 5 \\ -x + 12 \ge 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 10 > -x + 2 \\ 12 - 4x < -3x + 2 \end{cases}$