

EXERCICIS POLINOMIS I FRACCIONS ALGEBRAIQUES

Suma de monomis.

1. Realitza les següents operacions:

a) $2x^2 + 3x^2 =$

b) $8x^3 + 14x^3 =$

c) $6x^9 + 4x^9 =$

d) $12x^5 + 4x^5 =$

e) $11x^4 - 7x^4 =$

f) $13x^6 - 8x^7 =$

2. Realitza les següents operacions:

a) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^3 =$

b) $x^5 + 2x^5 =$

c) $y^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}y^2 =$

d) $3y^7 + \frac{1}{3}y^7 + 2y^7 =$

Suma de polinomis

1. Realitza les següents operacions:

a) $(3x^3 + 5x^2 + 1) + (8x^3 + 4x^2 + 5) =$

b) $(4x^3 + 11x^3 + 5x^2 + 1) + (8x^3 + 4x^2 + 5) =$

c) $(10x^5 + 8x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 10x + 9) + (7x^5 + 7x^4 + 11x^3 + 4x^2 + 10x + 1) =$

d) $(2x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 4x + 11) + (5x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 2x + 7) =$

e) $(3x^4 + 10x^3 + 12x^2 + 5x + 8) + (12x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 5x + 4) =$

f) $(6x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 3x - 9) + (2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 6) =$

g) $(-2x^3 - 4x^2 + 2x + 1) + (x^3 - 6x^2 - 5x + 2) =$

h) $(-\frac{2}{5}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 - 3x + 1) + (7x^4 + \frac{6}{5}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 5x - 3) =$

i) $(\frac{2}{5}x^{11} + 8x^7 - 3x^3 + 1) + (6x^{15} + \frac{3}{2}x^{11} + x^3 + x^2 + 10x) =$

Multiplicació de polinomis

1. Realitza les següents operacions:

a) $x^3(x^2 + 3x - 1) =$

b) $2x^5(2x^3 + 5x^2 - 7x + 3) =$

c) $(x - 4)(4x^3 - 6x^2 - x - 4) =$

d) $(2x + 1)(3x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 11x - 4) =$

e) $(x^3 + 7)(x^5 - 2x^4 + 5x^3 + x^2 - 3x + 1) =$

f) $(2x^2 + 5x)(x^3 + 7x^2 - 3x + 4) =$

g) $(2x^2 + 4x - 3)(x^2 - 7x + 1) =$

h) $(x^2 + 6x + 1)(2x^2 - 4x - 5) =$

i) $(2x^3 + 5x^2 - x + 2)(x^7 - 3x^5 + 4x^2 - x + 1) =$

j) $2x^5(2x^3 + 5x^2 - 7x + 3) =$

k) $(x - 4)(4x^3 - 6x^2 - x - 4) =$

l) $(2x + 1)(3x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 11x - 4) =$

m) $(x^3 + 7)(x^5 - 2x^4 + 5x^3 + x^2 - 3x + 1) =$

n) $(2x^2 + 5x)(x^3 + 7x^2 - 3x + 4) =$

o) $(2x^2 + 4x - 3)(x^2 - 7x + 1) =$

p) $(x^2 + 6x + 1)(2x^2 - 4x - 5) =$

q) $(2x^3 + 5x^2 - x + 2)(x^7 - 3x^5 + 4x^2 - x + 1) =$

Divisió de polinomis.

1. Calcula:

a) $8x^4 : 2x^3 =$

b) $12x^5 : 5x^5 =$

c) $\frac{-2}{3}y^3 : 5y =$

d) $\frac{-7}{4}a^9 : -\frac{2}{5}a^4 =$

Divideix els següents polinomis:

a) $\frac{2x^2 + 3x + 5}{x}$

b) $\frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$

c) $\frac{x^3 + x^2 - 7x + 2}{x - 2}$

d) $\frac{x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1}{x + 2}$

e) $\frac{5x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 1}{x + 2}$

f) $\frac{-3x^5 + 2x^3 + 4x^2 + 7}{x - 1}$

g) $\frac{2x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 3}$

h) $\frac{x^8 - 1}{x - 1}$

i) $\frac{5x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{2x + 1}$

2. Divideix els següents polinomis:

a) $\frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 3x - 2}$

b) $\frac{5x^7 - 3x^6 + 11x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 7}{x^2 - 3x + 4}$

c) $\frac{x^5 + 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x - 3}{x - 3}$

d) $\frac{x^3 - 19x - 30}{x^2 - 2x - 15}$

e) $\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3}$

f) $\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x + 1}$

g) $\frac{x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 14x^2 + 12x - 8}{x - 2}$

h) $\frac{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8}{x^2 + x - 2}$

i) $\frac{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8}{x^2 - 1}$

Divisibilitat de polinomis.

Direm que el polinomi $p(x)$ és divisible pel polinomi $q(x)$ quan la divisió entera $p(x) \underline{)q(x)}$ doni residu 0.

Equivalentment, direm que el polinomi $p(x)$ és un múltiple del polinomi $q(x)$.

Equivalentment, direm que el polinomi $q(x)$ és un divisor del polinomi $q(x)$.

1. Demuestra que el polinomi $p(x) = x^5 - 5x^4 - 18x^3 + 38x^2 - 12x + 1$ és divisible pel polinomi $q(x) = x^2 - 7x + 1$.
2. Demuestra que el polinomi $p(x) = 10x^5 - 19x^4 - 3x^3 + 17x^2 - 25x + 12$ és divisible pel polinomi $q(x) = 5x^2 + 3x - 4$.
3. Demuestra que el polinomi $p(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 + 28x - 16$
 - a) És divisible pel polinomi $q(x) = x^2 + 3x - 4$.
 - b) És divisible pel polinomi $r(x) = x - 4$.
 - c) És divisible pel polinomi $s(x) = x^2 - 4x + 4$.
 - d) No és divisible pel polinomi $s(x) = x + 3$.
4. Demuestra que el polinomi $p(x) = x^3 - 11x^2 + 35x - 25$
 - a) És un múltiple del polinomi $q(x) = x - 5$.
 - b) És un múltiple del polinomi $r(x) = x^2 - 6x + 5$
 - c) No és un múltiple del polinomi $s(x) = x^2 - 10x + 24$

Divisió de polinomis mitjançant el mètode de Ruffini.

Exemple:

$$4x^3 - 5x + 3 \overline{)x + 2}$$

	4	0	-5	3
		-8	16	-22
-2	4	-8	11	-19

L'última suma obtinguda (-19) és el residu de la divisió. La resta de nombres (4, -8 i 11) són els coeficients del polinomi quocient:

$$C(x) = 4x^2 - 8x + 11, R(x) = -19$$

1. Efectua les següents divisions de la forma habitual i mitjançant la regla de Ruffini:

- $(x^3 - 4x^2 + 3x + 5) : (x - 2)$
- $(2x^3 + 9x^2 + 11x + 7) : (x + 3)$
- $(x^6 + 2x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 29x^2 + x - 5) : (x + 4)$
- $(4x^6 - 4x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 6) : (x - 1)$

2. Fes servir la regla de Ruffini per a trobar el quocient i el reste de les següents divisions:

- $(x^3 - 6x^2 + 11x - 5) : (x - 3)$
- $(x^4 + 7x^3 + 13x^2 - x - 17) : (x + 4)$
- $(x^7 - 9x^6 + 19x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 19x^2 - 37x - 37) : (x - 5)$

3. Determina el residu de les divisions següents, utilitzant la regla de Ruffini:

- $2x^3 - 5x^2 + 3$ dividit per $x - 2$
- $x^4 - 3x^3 + 1$ dividit per $x + 2$
- $x^4 + 1$ dividit per $x + 1$
- $x^3 - x + 1$ dividit per $x + 1$
- $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ dividit per $x - 1$
- $-6 + 17x - 5x^2 - 3x^3 + x^4$ dividit per $x - 3$

Teorema del residu.

El valor numèric d'un polinomi per a $x = a$ coincideix amb la resta de la divisió d'aquest polinomi entre $x - a$.

1. Donat $p(x) = 2x^2 - x + 1$, calcula $p(a)$ per als valors de $a = 1$, $a = -1$ i $a = 2$. Fes-ho de dues maneres:
 - a) substituint el valor d'a.
 - b) dividint per $x - a$.

2. Donat $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 5$, calcula $p(a)$ per als valors de $a = 2$ i $a = 1$. Fes-ho de dues maneres:
 - a) substituint el valor d'a.
 - b) dividint per $x - a$.

3. Donat $p(x) = 4x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$, calcula $p(a)$ per als valors de $a = -2$ i $a = 1$. Fes-ho de dues maneres:
 - a) substituint el valor d'a.
 - b) dividint per $x - a$.

4. Donat el polinomi $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x - 2$ comprova, substituint, que $p(-4) = -58$. És segur que la divisió de $p(x) : (x + 4)$ dóna -58 de resta? Efectua la divisió i fes la prova de la divisió.

5. Calcula el residu de les divisions:
 - a) $x^{54} - 2x + 3 \underline{|x-1}$
 - b) $x^{175} - 2x + 5 \underline{|x+1}$

6. Calcula a per a que el polinomi $p(x) = x^3 + x^2 - ax + 1$, dividit entre el polinomi $q(x) = x + 1$, doni residu 0.

7. Mitjançant el teorema del residu, comprova si és veritat o no que:
 - a) $x - 1$ és divisor de $x^{55} + 1$
 - b) $x + 1$ és divisor de $x^{55} + 1$

8. Mitjançant el teorema del residu, comprova si és veritat o no que $x = 3$ és solució de l'equació $6x^5 - 19x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 17x - 6 = 0$

9. Mitjançant el teorema del residu, comprova si és veritat o no que $x = -4$ és solució de l'equació $2x^6 + 12x^5 + 11x^4 - 25x^3 - 19x^2 - 2x - 23 = 0$

Factorització de polinomis.

1. Factoritza completament aquests polinomis:

- a) $x^4 - x^2$
- b) $x^4 - 2x^2 + 1$
- c) $x^6 - x^2$
- d) $x^4 - 3x^3 + 5x^2$

2. Factoritza els polinomis següents:

- a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
- b) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$
- c) $x^3 - 1$
- d) $x^3 - 4x^2 - 5x$

3. Factoritza els polinomis següents:

- a) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ (indicació: 4 és una arrel)
- b) $-2x^3 + 2x^2 + 18x - 18$ (indicació: -3 és una arrel)
- c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
- d) $3x^3 - x^2 - 7x + 5$
- e) $-x^3 + 25x$
- f) $x^3 - 8$

4. Escribeu com a producte de factors cadascun dels polinomis següents:

- a) $2x^2 - 4x - 30$
- b) $4x^2 - 4x + 1$
- c) $-3x^2 + 2x + 1$
- d) $2x^2 - 3x + 1$

5. Escriu com a producte de factors de primer grau i comprova mitjançant multiplicacions que les igualtats són certes.

a) $x^2 + x - 2$

b) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

c) $x^2 - 4x + 4$

d) $x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 31x - 30$

6. Escriu com a producte de factors de primer grau els polinomis següents:

a) $x^4 - 25x^2$

b) $x^3 + 12x^2 + 36x$

c) $49x^2 - 36$

d) $\frac{4}{49}x^2 - \frac{1}{81}$

7. Factoritza els següents polinomis:

a) $x^3 - 3x - 2$

b) $x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x$

8. Treu factor comú:

a) $x^5 - 9x^3$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2$

c) $x^2 - 3x$

9. Descompon en factors:

a) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$

b) $2x^5 - 6x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 32x$

c) $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$

Simplificació de fraccions algebraiques

1. Simplifica la següent fracció algebraica:

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

2. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$

b) $\frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1}$

$$c) \frac{3x^2 - 6x - 9}{2x - 6}$$

$$d) \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^3 + 2x^2 - 16x - 24}$$

3. Simplifica:

$$\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6}$$

4. Simplifica:

$$a) \frac{(x-6)^2}{x^2 - 5x - 6}$$

$$b) \frac{x^4 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$c) \frac{x^5 - x^3}{x^7 + x^4}$$

5. Determina per a quin valor o per a quins valors de m es pot simplificar:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + mx - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Suma i resta de fraccions algebraiques.

1. Redueix a comú denominador les següents fraccions algebraiques:

$$a) \frac{3x}{x-2}, \frac{x+1}{x^2-4} \text{ i } \frac{x}{x+2}$$

$$b) \frac{x-1}{x-4}, \frac{7x}{x^2-16} \text{ i } \frac{2x-1}{x+4}$$

2. Realitza la següent suma:

$$\frac{2x+6}{x^2-3x} - \frac{x+5}{x^2-4x+3} =$$

3. Efectua i simplifica:

$$a) \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} =$$

$$b) \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2+2x} - \frac{2}{x+1} =$$

4. Calcula i simplifica:

$$a) \frac{2(x-3)}{x^2+2x-3} - \frac{3}{x+3} =$$

$$b) \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2-x} =$$

5. Calcula i simplifica:

$$a) \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$$

$$b) \frac{2x+6}{x} - \frac{2x^2+4x-6}{x^2-x} =$$

$$c) \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} =$$

$$d) \frac{1}{t} + \frac{1-t}{t^2+2t} - \frac{2}{t+2} =$$

Multiplicació i divisió de fraccions algebraiques.

1. Calcula el següent producte:

$$\frac{x}{3x+3} \cdot \frac{x^2-1}{x^3+2x^2} =$$

2. Calcula el següent quocient:

$$\frac{2x}{x+1} : \frac{x^2+x}{x+5} =$$

3. Efectua i simplifica:

$$a) \frac{x}{x+1} : \frac{x^2+2x^2}{x^2-1} =$$

$$b) \frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{3x+1}{x^2+3} =$$

$$c) \frac{x^2+x+1}{x+1} : \frac{x}{x^2-1} =$$

4. Calcula:

$$\frac{(2n+1)(n-2)}{n-3} \cdot \frac{n^2}{(2-n)(n+3)}$$

5. Opera i simplifica:

$$a) \frac{1}{x^2-8} : \frac{1}{2-x}$$

$$b) (5x+10) : \frac{x+2}{x-3}$$

6. Opera i simplifica:

a) $\frac{x+2}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+3}{3x+1}$

b) $\frac{2x}{x-1} : \frac{x^3}{x^5+1}$

Operacions combinades amb polinomis.

1. Efectua les operacions següents:

a) $\frac{(x^2+3x-1)(3x+2)+(x-4)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

b) $\frac{(2x-1)^2(3x+2)+(x-1)^2(x+1)}{(x+2)^2-(x+3)^2-x^2}$

c) $\frac{\frac{x^4-x^3+5x^2-9x+3}{x-1} + \frac{x^5-x^3+x^2-8x+4}{x+2}}{x^2+3x-2}$

d) $\frac{x^2+x-2+(x+2)(x-3)^2}{(x+2)(x+3)}$

e) $\frac{x^4-(x^2+3x-1)^2}{x^3 + \frac{x^2-x-2}{x+1}}$