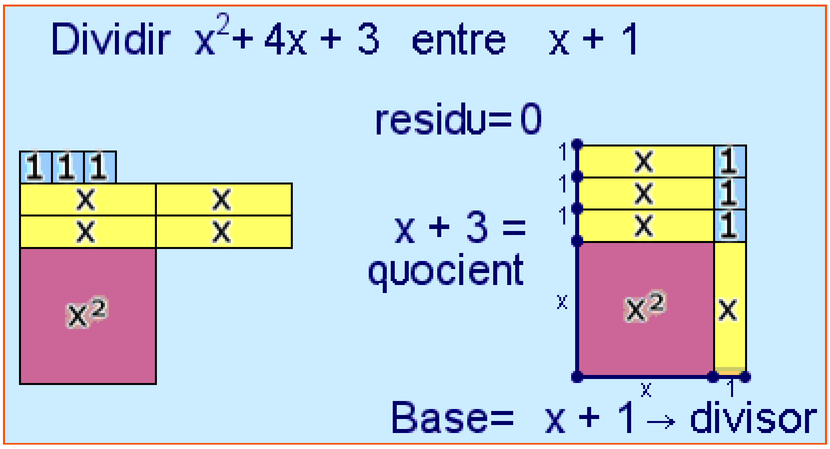
4 Polinomis

Objectius

En aquesta quinzena aprendràs:

- A treballar amb expressions literals per obtenir valors concrets en fórmules i equacions en diferents contextos.
- La regla de Ruffini.
- El teorema del residu.
- A reconèixer els polinomis amb coeficients reals irreductibles.
- A factoritzar polinomis amb arrels enteres.

Abans de començar



Per dividir x^2+4x+3 entre $x+1$ prenem peces: una d'àrea x^2 quatre d'àrea x tres d'àrea 1. I formem amb elles el rectangle més gran possible que tingui de base x+1.

En la figura veiem que $x^2+4x+3=(x+1)\cdot(x+3)$.

Et proposem un repàs d'algunes de las coses apreses en los cursos anteriors:

Expressions algebraiques

$-3 \cdot (x+y)$

El doble	
El triple	
La meitat	del quadrat
Menys el doble	del cup
Menys el triple	**de x i y**
Menys la meitat	de x menys y
L'arrel	de x per y
27 per cent	de l'invers
	de x entre y

Elements d'un polinomi

$P(x)=2x^5 + x^4 - 1$

Els seus coeficients

gr 5	gr 4	gr 3	gr 2	gr 1	gr 0
2	1	0	0	0	-1

El grau: 5

Quants monomis? 3

Valor numèric en 1: 1

Producte de polinomis

$P(x)= -5x^2-4x-3$
$Q(x)= -5x+2$

Es multiplica coeficient a coeficient

P(x)→		-5	-4	-3
Q(x)→			-5	2
		-10	-8	-6
	25	20	15	
P(x)·Q(x)→	25	10	7	-6

$25x^3 + 10x^2 + 7x - 6$

Equacions de segon grau

Equació de segon grau

$2x^2 - 4x - 16 = 0$

Pas 1: Identificar a,b i c

a= 2 ; b= -4 ; c= -16

Pas 2: Aplicar la fórmula

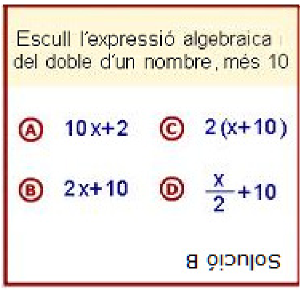
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{16+128}}{4}=\frac{4\pm 12}{4}\qquad x=4\quad x=-2$$

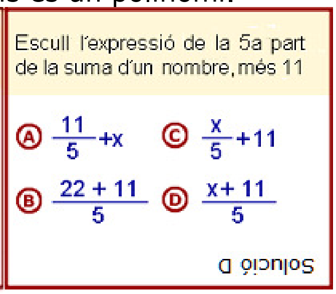
1. Expressions algebraiques

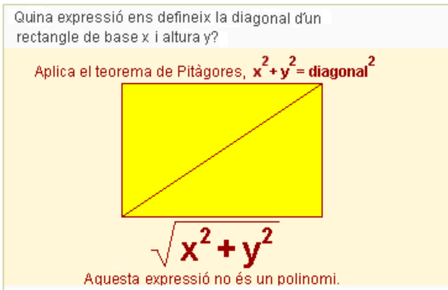
Transformar enunciats en expressions

Són moltes les situacions en les quals s'utilitzen expressions algebraiques, a la dreta se'n presenten algunes.

Quan l'expressió algebraica és d'aquests tipus: $3xy^2$; $2x^{10}$; $3/4 \cdot x^2 \cdot y^5$ només amb productes de nombres i potències de variables d'exponent natural, s'anomena monomi. La suma de diversos monomis és un polinomi.







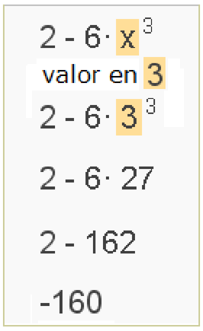
Valor numèric

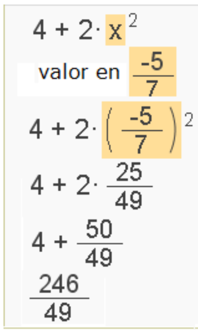
Si en una expressió algebraica substituïm les lletres (variables) per nombres, el que tindrem serà una expressió numèrica. El resultat d'aquesta expressió és el que anomenem valor numèric de l'expressió algebraica per aquests valors de les variables.

Observa els exemples de l'escena de la dreta.

És important que tinguis en compte la **prioritat de les operacions**

1. Potències
2. Productes i quocients
3. Sumes i restes





Amb la calculadora

Pots utilitzar la calculadora per trobar el valor numèric d'un polinomi. Recorda que per realitzar la potència 7^4 s'utilitza la tecla x^y,

7 x^y 4 = →2041

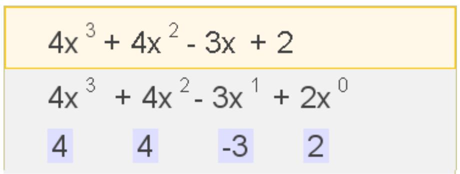
Polinomis. Expressió en coeficients

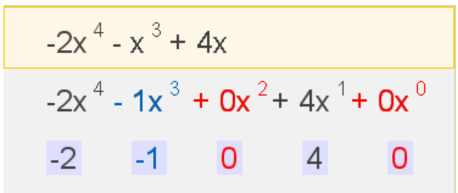
Els polinomis són expressions algebraiques on les parts literals no porten per exponents nombres negatius o fraccions, els coeficients poden portar arrels i es poden dividir per nombres, però en els polinomis no apareix un literal dividint, ni dins d'una arrel.

És molt convenient que recordis la manera d'expressar un polinomi mitjançant els seus coeficients, tal i com s'explica a l'escena de la dreta.

No t'oblidis de posar un zero en el coeficient quan al polinomi li falta la potència d'un grau, així en el polinomi $2x^3+x+5$ escrivim 2 0 1 5.

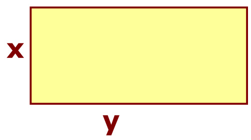
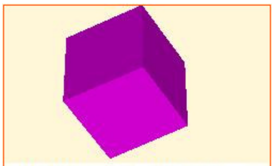
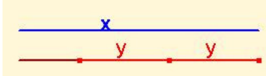
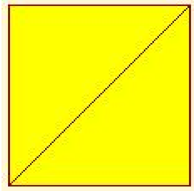
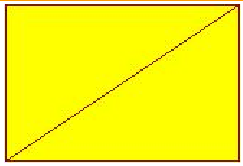
A cop d'ull i sense passos intermedis has de saber veure l'expressió en coeficients d'un polinomi.





EXERCICIS resolts

1. Troba les expressions algebraiques associades a cada imatge

Àrea del rectangle 	 **Volum, aresta=x**	Longitud del segment marró 	Quin polinomi expressa la **mitjana aritmètica de** dos nombres **x, y**
El triple d'un nombre menys cinc	La suma dels quadrats de dos nombres	 La diagonal d'un quadrat de costat x	 La diagonal d'un rectangle de base x i altura y

Solucions

$x \cdot y$ Polinomi de grau 2 i dues variables	x^3 Monomi de grau 3	x-2y Polinomi de grau1 Dues variables	0,5x+0,5y Polinomi de grau1 Dues variables
3x-5 Polinomi de grau 1 Una variable	x^2+y^2	$\sqrt{2}\cdot x$	$\sqrt{x^2+y^2}$

2. Escull l'expressió algebraica en cada cas

1 El triple d'un nombre més sis. Ⓐ $6x+3$ Ⓑ $3x+6$ Ⓒ $3(x+6)$ Ⓓ $\frac{x}{3}+6$	2 La cinquena part d'un nre. més 10. Ⓐ $\frac{x}{5}+10$ Ⓑ $\frac{x+10}{5}$ Ⓒ $10x+5$ Ⓓ $5x+10$	3 Un quart de la suma un nre. més 7. Ⓐ $\frac{x+7}{4}$ Ⓑ $\frac{x}{4}+7$ Ⓒ $\frac{14+7}{4}$ Ⓓ $\frac{7}{4}+x$	4 La semisuma de dos nombres. Ⓐ $\frac{x\cdot y}{2}$ Ⓑ $\frac{x+y}{2}$ Ⓒ $\frac{x}{2}+y$ Ⓓ $\frac{x-y}{2}$	5 La meitat del producte de 2 nres. Ⓐ $\frac{x}{2}\cdot y$ Ⓑ $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}$ Ⓒ $\frac{x-y}{2}$ Ⓓ $\frac{x\cdot 7}{2}$
6 L'arrel quadrada de la suma de 2 quadrats. Ⓐ $x+y$ Ⓑ x^2+y^2 Ⓒ $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$ Ⓓ $\sqrt{x^2+y^2}$	7 El 40% d'un nombre. Ⓐ $0.4\ x$ Ⓑ $\frac{40}{100x}$ Ⓒ $\frac{40}{10}x$ Ⓓ $\frac{100x}{40}$	8 El quadrat de la suma de 2 nombres. Ⓐ $(z+y)^2$ Ⓑ x^2+y^2 Ⓒ $x+y^2$ Ⓓ $(12+y)^2$	9 El quadrat de la semisuma de 2 nombres. Ⓐ $\frac{x^2+y^2}{4}$ Ⓑ $\frac{x+y^2}{2}$ Ⓒ $\frac{(x+y)^2}{4}$ Ⓓ $\frac{(x+y)^2}{2}$	10 La mitjana aritmètica de tres nombres. Ⓐ $0.5x+0.5y+0.5z$ Ⓑ $\left(\frac{x+y}{2}+z\right)/2$ Ⓒ $\frac{x+y+z}{3}$ Ⓓ $\frac{x+y+z}{2}$

Solucions: 1 B; 2 A; 3 A; 4 B; 5 A; 6 D; 7 A; 8 A; 9 C; 10 C.

EXERCICIS resolts

3. Troba els valors numèrics indicats en cada cas.

$2-7\cdot x^5$ en (-2)	$3+5\cdot x^3$ en $\frac{2}{3}$	$3\sqrt{x}-3\cdot x^3$ en 9	$\frac{x^5}{y^3}+4$ en $x=-2$, $y=3$	$\frac{x^5}{y^4}+1$ en $x=4$, $y=4$
$2-7\cdot(-2)^5$	$3+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$3\sqrt{9}-3\cdot 9^3$	$\frac{(-2)^5}{3^3}+4$	$\frac{4^5}{4^4}+1$
$2-7\cdot -32$	$3+5\cdot\frac{8}{27}$	$3\cdot 3-3\cdot 729$	$\frac{-32}{27}+4$	4^1+1
$2+224$	$3+\frac{40}{27}$	$9-2187$		$4+1$
226	$\frac{121}{27}$	-2178	$\frac{76}{27}$	5

4. Valor numèric en -3

$2\cdot x^2+5\cdot x+6$	Substitueix x per (-3)
$2\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)+6$	Realitza la potència de (-3)
$2\cdot 9+5\cdot(-3)+6$	Efectua els productes
$18+(-15)+6$	Opera
9	Aquest és el valor del polinomi per x=-3. Prem el botó > de l'extrem superior.

5. Valor numèric en 0,1

$3\cdot x^2+7\cdot x+2$	Substitueix x per 0,1
$3\cdot 0{,}1^2+7\cdot 0{,}1+2$	Efectua les potències
$3\cdot 0{,}01+7\cdot 0{,}1+2$	Realitza els productes
$0{,}03+0{,}7+2$	Escriu el resultat
$2{,}73$	

6.

x^3+4x-2

Quin és el grau del polinomi?

Escriu els coeficients en els requadres.

Solució: grau 3.

Coeficients: 1 0 4 -2

$x^4-2x^3-x^2-2x$

Quin és el grau del polinomi?

Escriu els coeficients en els requadres.

Solució: grau 4.

Coeficients: 1 -2 -1 -2 0

2. Divisió de polinomis

Divisió

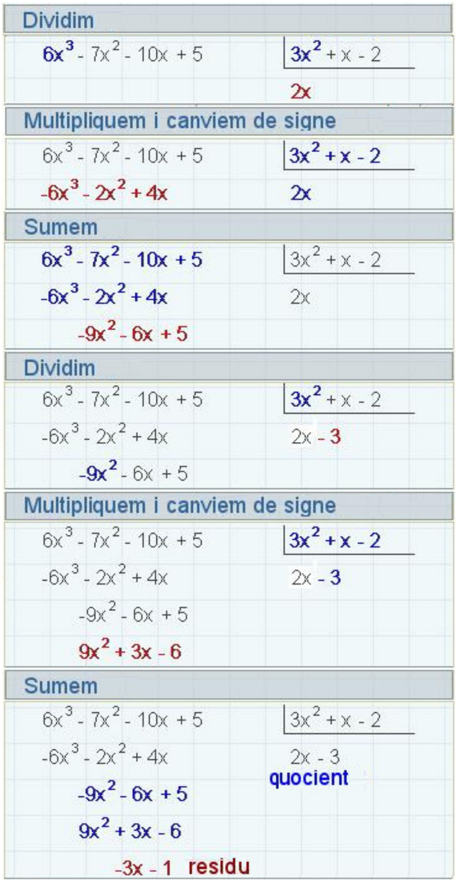
Per realitzar la divisió **es divideixen** els monomis de major grau, **es multiplica** i es canvia de signe, i **se suma.** Aquest procés es repeteix fins obtenir un residu de grau menor que el del divisor.
La divisió de polinomis ha de complir aquestes dues condicions:

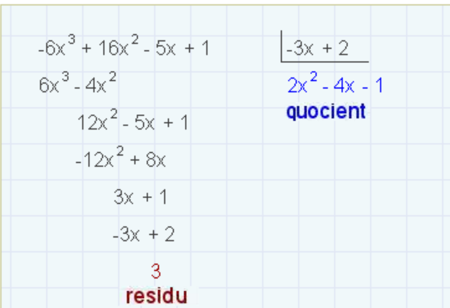
Dividend=divisor · quocient + residu
gr(residu)<gr(divisor)

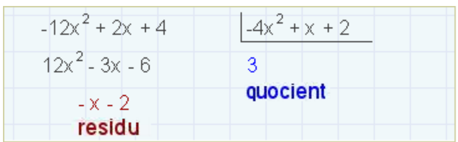
El grau del quocient és la diferència dels graus del Dividend i del divisor. Quan el residu és zero, es diu que el dividend és divisible entre el divisor.

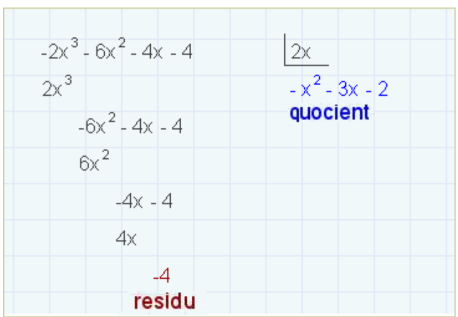
Divisió per coeficients

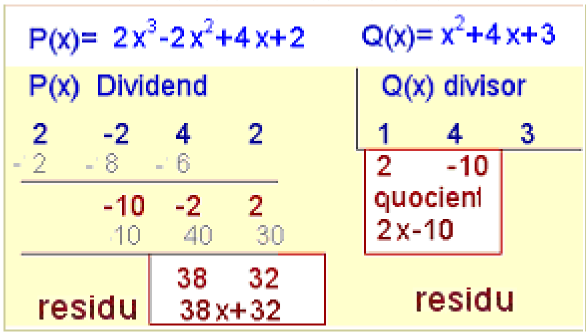
A continuació es veu una divisió de polinomis amb l’expressió en coeficients, algunes vegades pot ser convenient aquest mètode o simplement serà qüestió de preferències triar un mètode o un altre.

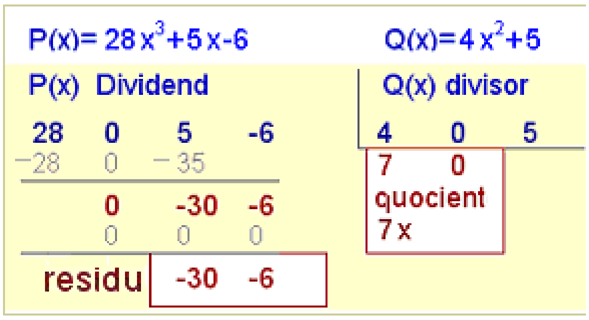


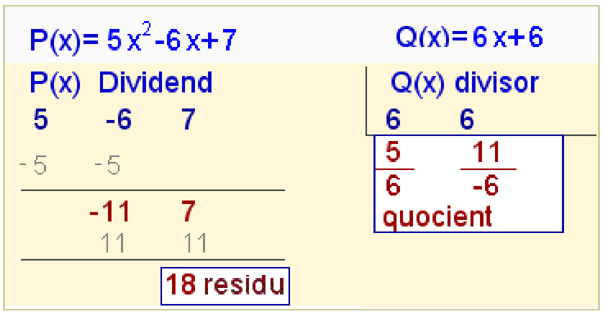












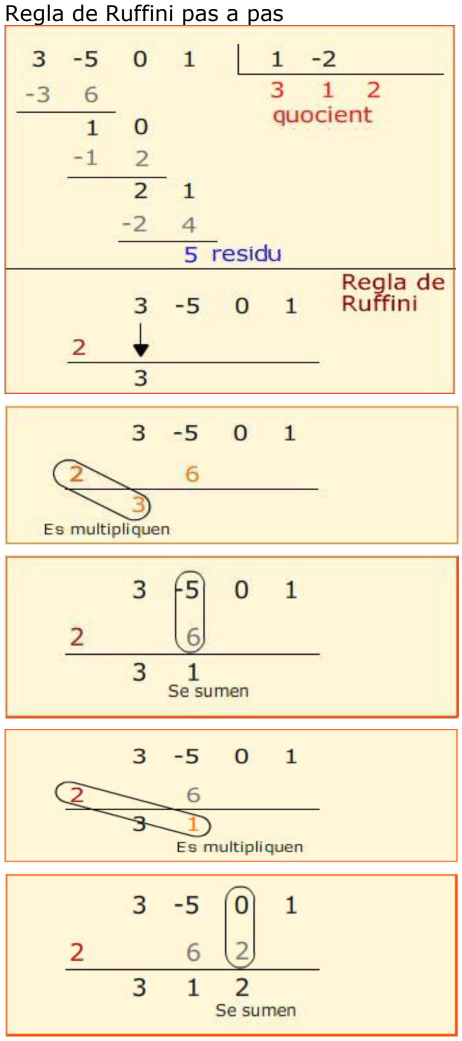
Regla de Ruffini

La regla de Ruffini és útil per dividir polinomis entre x-a.
En l'exemple de la dreta es divideix $3x^3-5x^2+1$ entre x-2, obtenint de quocient $3x^2+x+2$ i de residu 5.
La regla explicada per a **a=2**, val també quan **a** és un nombre racional o real, en el següent exemple es pren **a=-3/2** i representa la divisió de $4x^2+5x+2$ entre x+3/2

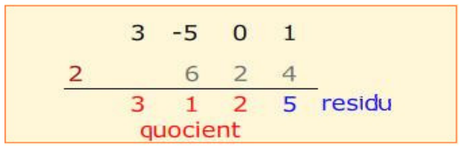
	4	5	2
-3/2		-6	3/2
	4	**-1**	**7/2 residu**

quocient
4x-1

Observa la divisió i com es realitza la Regla de Ruffini pas a pas



Es torna a multiplicar i a sumar obtenint



Teorema del residu

Quan dividim un polinomi P(x) per (x-a) el residu és sempre de grau zero i s'obté un quocient C(x) que verifica:

$$P(x)=(x-a)\cdot C(x)+\text{residu}$$

Si substituïm ara la x per a,

$$P(a) = (a-a)\cdot C(a) + \text{residu}$$

En la igualtat anterior (a-a)=0, per tant,

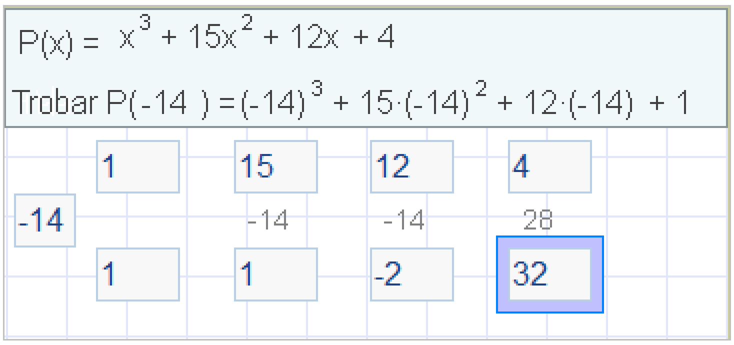
valor numèric de P en a = residu

Aquest resultat es coneix com **teorema del residu**
Així el valor numèric P(x) en a serà zero quan P(x) sigui divisible per (x-a), és a dir, el residu de P(x) entre x-a és zero, en aquest cas diem que **a és arrel** del polinomi P(x).

Recorda

a és arrel de P(x)⇔ P(x)=(x-a)·C(x) ⇔ P(a)=0

El teorema es pot aplicar per calcular alguns valores numèrics.



També s'utilitza per resoldre problemes com el següent, trobar m perquè el polinomi

$$P(x)=x^3+mx-4$$

sigui divisible per x-2, que es resol substituint la x per 2, igualant a 0 i aïllant m, així m=-2.

Amb la calculadora

Calcular el valor numèric d'un polinomi amb la calculadora, valor de $P(x)= 3x^3-5x^2+1$ en x=2
Podem aplicar la regla de Ruffini, per a això tecleja la següent seqüència:

2 M in x 3 → 3
-5 = → 1
x MR + 0 = → 2
x MR + 1 = 5

Obtenim: 5 que és el residu de dividir P(x) per x-2 i el valor numèric en x=2.
De passada han sortit els coeficients del quocient cada cop que es premia =.

cidead

EXERCICIS resolts

7. Troba el quocient i el residu de la divisió de P(x) entre Q(x) en cada cas

a) $P(x)=3x^2-11x-13$ $Q(x)=x^2-3x-4$ b) $P(x)=-9x^3-15x^2+8x+16$ $Q(x)=3x+4$

Sol. Quocient=3   Residu=-2x-1   Sol. Quocient= $-3x^2-x+4$ Residu=0

8. Aplica la regla de Ruffini per dividir $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ i $R(x)=x^3-4x+3x^2$ entre x-3

	1	5	-2	1
3)		3	24	66
	1	8	22	67

Quocient $x^2+8x+22$

Residu 67

	2	0	0	0	-5
3)		6	18	54	162
	2	6	18	54	157

Quocient $2x^3+6x^2+18x+54$

Residu 157

	1	3	-4	0
3)		3	18	42
	1	6	14	42

Quocient $x^2+6x+14$

Residu 42

9. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ i $R(x)=x^3-4x^2-x$ entre x+1

	1	3	-2	1
-1)		-1	-2	4
	1	2	-4	5

Quocient x^2+2x-4

Residu 5

	1	0	0	0	-2
-1)		-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1

Quocient x^3-x^2+x-1

Residu -1

	1	-4	-1	0
-1)		-1	5	-4
	1	-5	4	-4

Quocient x^2-5x+4

Residu -4

10. Si el valor numèric de un polinomi en 2 és igual a 3 i el quocient de la seva divisió entre x-2 és x. Saps de quin polinomi es tracta?

Dividend = divisor · quocient + residu, el divisor és x-2, el quocient x i el residu 3, per tant el polinomi és x^2-2x+3

11. Troba m perquè mx^2+2x-3 sigui divisible entre x+1

El polinomi serà divisible entre x+1 si el seu valor en -1 és 0, llavors ha de ser

m-2-3=0, és a dir, m=5

12. Aplica el Teorema del residu i la regla de Ruffini per trobar el valor numèric de $P(x)=x^3-15x^2+24x-3$ en x=13

Aplicant la regla de Ruffini per x-13 dóna de residu –29, que és el valor numèric demanat.

13. Existeix algun valor de **m** perquè el polinomi $x^3+mx^2-2mx+5$ sigui divisible per x-2?

Pel teorema del residu n'hi ha prou en resoldre l'equació $2^3+m\cdot2^2-2m\cdot2+5=0$, el que dóna una igualtat impossible 13=0, per tant no hi ha cap valor de **m** pel qual el polinomi sigui divisible per x-2

3. Descomposició factorial

Treure factor comú una potencia de x

Al descompondre un polinomi en factors el primer que haurem d'observar és si es pot treure factor comú de tots els sumands alguna potencia de x.

Això només serà possible quan el coeficient de grau zero del polinomi sigui nul.

En la part inferior pots practicar aquesta extracció.

També és interessant que busquis, si és possible el mcd dels coeficients i l'extreguis com a factor així en

$$6x^5+15x^2$$

es pot treure de factor comú $3x^2$,

$$6x^5+15x^2=\mathbf{3}x^2(2x^3+5)$$

$$2\boxed{x^9}+\boxed{x^6}-3x^4=$$
$$=2\boxed{x^4\cdot x^5}+\boxed{x^4\cdot x^2}-3\cdot x^4$$

x^4 està en tots els sumands.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=\ x^4\cdot(2x^5+x^2-3)$$

S'ha tret factor comú una potència de x.

Polinomis de 2n. grau

Recorda la fórmula per resoldre l'equació de 2n. grau $ax^2 + bx + c=0$:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A b^2-4ac se l'anomena discriminant de l'equació i se sol designar per Δ.

Això determina la descomposició factorial dels polinomis de 2n. grau:

Les solucions de $2x^2-8x+6=0$ són 1 i 3, llavors $2x^2-8x+6 = 2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$, discriminant positiu.

Les solucions de $3x^2+6x+3=0$ són 1 i 1, llavors $3x^2+6x+3=(x-1)2$, $\Delta=0$.

Les solucions de $2x^2+6 = 0$ no són reals, b^2-4ac és negatiu, $2x^2+6$ no descompon.

$-2x^2+20x-48=0$

Pas 1: Identificar a,b i c

a= -2 ; b= 20 ; c= -48

Pas 2: Aplicar la fórmula $\Delta = b^2-4ac$

$\Delta=(20)^2-4\cdot(-2)\cdot(-48)=16$

Pas 3: Estudiar el nombre de solucions

$\Delta>0$ Hi ha dues solucions diferents pots comprovar que són 6 i 4

Descomposició

$-2x^2+20x-48=-2\cdot(x-6)\cdot(x-4)$

$3x^2+54x+243=0$

Pas 1: Identificar a,b i c

a= 3 ; b= 54 ; c= 243

Pas 2: Aplicar la fórmula $\Delta = b^2-4ac$

$\Delta=(54)^2-4\cdot(3)\cdot(243)=0$

Pas 3: Estudiar el nombre de solucions

$\Delta=0$ Hi ha dues solucions iguals pots comprovar que és -9

Descomposició

$3x^2+54x+243=3\cdot(x+9)^2.$

$-3x^2+4x-8=0$

Pas 1: Identificar a,b i c

a= -3 ; b= 4 ; c= -8

Pas 2: Aplicar la fórmula $\Delta = b^2-4ac$

$\Delta=(4)^2-4\cdot(-3)\cdot(-8)=-80$

Pas 3: Estudiar el nombre de solucions

$\Delta<0$ No hi ha solució

Descomposició

$-3x^2+4x-8$ no descompon

Arrel 2	Arrel -2
Divisor x - 2	Divisor x + 2

Regla de Ruffini reiterada

Si x-a és un divisor del polinomi P(x), es diu que **a és arrel** de P(x), pel teorema del residu sabem que això equival a dir que P(a)=0.

$P(x)=p_n\mathbf{x}^n+p_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{x}+p_0$ i **a arrel** de P(x),

$p_n\mathbf{a}^n+p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{a}+p_0=0,$

i aïllant p_0

$p_0=-p_n\mathbf{a}^n-p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}-\ldots-p_1\mathbf{a}$

Per tant, si els coeficients de P(x) són nombres enters i **a** també, p_0 és múltiple de **a**.

> Les **arrels** enteres no nul·les d'un polinomi amb coeficients enteres, són **divisors del coeficient de menor grau** del polinomi.

La descomposició d'un polinomi de tercer grau amb arrels 4, 1 i -2 serà a·(x-4)·(x-1)·(x+2).
S'anomena **multiplicitat** d'una arrel al nombre de vegades que apareix en la descomposició.

Descomposició factorial de $x^4-15x^2+10x+24$

Les possibles arrels racionals d'aquest polinomi són els divisors de 24

±1 ±2 ±3 ±4 ±6 ±8 ±12 ±24

Amb la regla de Ruffini anem veient quins divisors són arrels

	1	0	-15	10	24
-1)		-1	1	14	-24
	1	**-1**	**-14**	**24**	**0**
2)		2	2	-24	
	1	1	-12	**0**	
3)		3	12		
	1	4	**0**		

$x^4-15x^2+10x+24$=
(x+1)·(x-2)·(x-3)·(x+4)

Identitats notables

Suma al quadrat

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostració

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & b \\ \hline & ab & b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & +2ab+ & b^2 \end{array}$$

La suma al quadrat és igual a
quadrat del 1r.
+ doble del 1r. pel 2n.
+ quadrat del 2n.

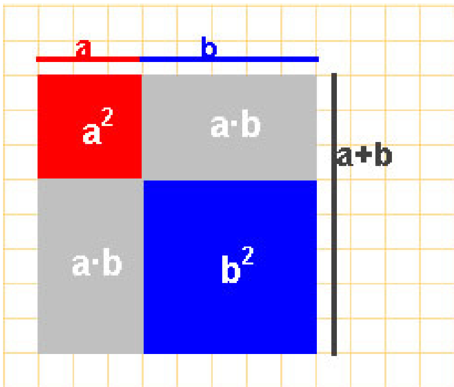
Diferència al quadrat

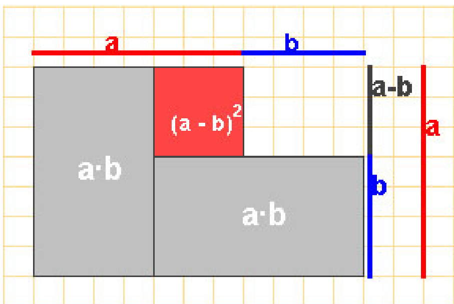
$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostració

$$\begin{array}{rrr} & a & -b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline a^2 & -2ab+ & b^2 \end{array}$$

La diferencia al quadrat és igual a
quadrat del 1r.
- doble del 1r. pel 2n.
+ quadrat del 2n.





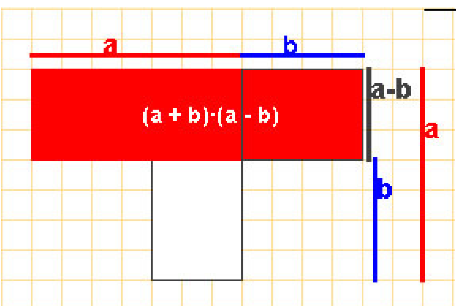
Suma per diferència

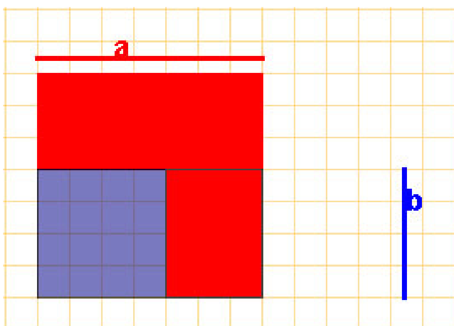
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

La suma per diferència és igual a la diferència de quadrats.

Demostració

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & -b \\ & -ab & -b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$





EXERCICIS resolts

14. Treu factor comú una potència de x en cada un dels següents polinomis:
$P(x)=2x^3+3x$ $Q(x)= x^4+2x^6-3x^5$ $R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Solució: $P(x)=x\cdot(2x^2+3)$ $Q(x)=x^4\cdot(2x^2-3x+1)$ $R(x)=2x^3\cdot(x^3+3x^2+4)$, en aquest últim cas s'ha pogut treure factor comú també un nombre.

15. Troba la descomposició factorial de $\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}$

Les possibles arrels racionals d'aquest polinomi són els divisors de 12

$\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm12$

Amb la regla de Ruffini mirem quins divisors són arrels del polinomi

	1	-7	4	12
-1)		-1	8	-12
	1	**-8**	**12**	**0**
2)		2	-12	
	1	-6	**0**	

$\boxed{\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)}$

16. Factoritza $2x^2-8x+6$; $-x^2+3x+4$; x^2+2x+3; x^2+6x+9.

$2x^2-8x+6=2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ doncs $2x^2-8x+6=0$ té per solucions $x=1$; $x=3$.

$-x^2+3x+4=-(x+1)\cdot(x-4)$ doncs $-x^2+3x+4=0$ té per solucions $x=-1$; $x=4$.

x^2+2x+3 no descompon ja que el seu discriminant és <0

$x^2+6x+9=(x+3)^2$ ja que el seu discriminant és 0, llavors té una arrel doble: $x=-3$.

17. Troba la descomposició factorial de $\mathbf{x^7-x^6-4x^4}$

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$. S'ha tret factor comú x^4.
Les possibles arrels enters de x^3-x^2**-4** són els **divisors de -4**:

1,-1, 2,-2, 4,-4

Vegem per la Regla de Ruffini si 1 és arrel de P

	1	-1	0	-4
1)		1	0	0
	1	0	0	**$-4\neq 0$,**

1 no és arrel de P

Vegem per la Regla de Ruffini si -1 és arrel de P

	1	-1	0	-4
-1)		-1	2	-2
	1	-2	2	**$-6\neq 0$**

-1 no és arrel de P

Vegem per la Regla de Ruffini si **2** és arrel de P

	1	-1	0	-4
2)		2	2	4
	1	1	2	**0**

2 és arrel de P

1 1 2 = x^2+x+2 L'equació $x^2+x+2=0$ no té solucions reals, per tant és primer.

$\boxed{\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x\mathbf{-2})\cdot(x^2+x+2)}$

EXERCICIS resolts

18. Troba la descomposició factorial de $\mathbf{x^4-4}$

Busquem les arrels racionals de $\mathbf{x^4-4}$. Les possibles arrels en Q són els quocients dels divisores de -4 (coeficient de menor grau) entre els divisors de 1 (coeficient de major grau),

divisors de -4	± 1	± 2	± 4

Es fàcil veure amb la regla de Ruffini que cap dels possibles valors són arrels de x^4-4. El polinomi no té arrels racionals.

Si es reconeix x^4-4 com una diferència de quadrats, $(\mathbf{x^2})^2-\mathbf{2}^2$ resultarà fàcil la descomposició factorial:
$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
El primer factor és primer, però el segon torna a ser una diferència de quadrats $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\boxed{\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

19. Troba la descomposició factorial de $\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$

Les possibles arrels enteres de $x^4+x^3-x^2-2x\mathbf{-2}$ són els **divisors de -2**:

1,-1, 2,-2

Vegem per la Regla de Ruffini si 1 és arrel de P

	1	-1	-1	-2	-2
1)		1	0	-1	-3
	1	0	-1	-3	**-5**

-5 diferent de 0, 1 no és arrel de P

Vegem per la Regla de Ruffini si -1 és arrel de P

	1	-1	-1	-2	-2
-1)		-1	2	-1	3
	1	-2	1	-3	**1**

1 diferent de 0, **-**1 no és arrel de P

Vegem per la Regla de Ruffini si 2 és arrel de P

	1	-1	-1	-2	-2
2)		2	2	2	0
	1	1	1	0	**-2**

-2 diferent de 0, 2 no és arrel de P

Vegem per la Regla de Ruffini si 1 és arrel de P

	1	-1	-1	-2	-2
-2)		-2	6	-10	24
	1	-3	5	-12	**22**

22 diferent de 0, -2 no és arrel de P

$\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$ No té arrels enteres

No podem trobar la descomposició factorial d'aquest polinomi.

Per practicar

1. Troba l'expressió algebraica de un nombre de tres xifres si la xifra de les unitats és 4 vegades la xifra de les desenes.

2. Quin és el grau de $2x^5-x^3+3x^2$? El seu coeficient de grau 3? i el de grau 2? Calcula el seu valor numèric en x=2

3. Troba P(x)-3·Q(x) sent $P(x)=4x^2+4x$ i $Q(x)=6x^2+2x$.

4. Multiplica els polinomis:
$P(x)=-3x^3+4x^2-x-2$ i $Q(x)=-x^2+7$.

5. Troba el quocient i el residu de la divisió de x^3+2x^2+5x-7 entre $-x^2+x-1$.

6. Fes la divisió de x^3+4x^2+2x-3 entre x-2 amb la regla de Ruffini.

7. Aplica el teorema del residu per calcular el residu de la divisió de $2x^3-2x^2+x-7$ entre x-5.

8. a) Troba m perquè $x^3+mx^2-2mx+6$ sigui divisible per x+2

b) Troba m perquè $x^3+mx^2-8mx+4$ sigui divisible per x-1.

9. Efectua les potències
a) $(3x+2)^2$
b) $(2x-4)^2$
c) $(x-5)^2$

10. Descompondre, aplicant les Identitats notables, els polinomis:
a) $x^4-72x^2+36^2$
b) x^4-16

11. Descompondre els següents polinomis, si és possible, aplicant l'equació de segon grau.
a) $3x^2-10x+3$
b) x^2-4x+5

12. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\dfrac{x^2+8x+16}{3x+12}$

b) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}$

c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{12x^2-3}$

13. Treure factor comú en $12x^{12}+24x^{10}$

14. Troba la descomposició en factors primers dels següents polinomis:

a) $3x^8-39x^7+162x^6-216x^5$

b) $3x^9+12x^8+15x^7+6x^6$

15. Un polinomi de grau 3 té per arrels –5, 7 i 1. Troba la seva descomposició factorial sabent que el seu valor en 2 és 128.

16. Com realitzes mentalment el càlcul de 23^2-22^2?

Per saber-ne més

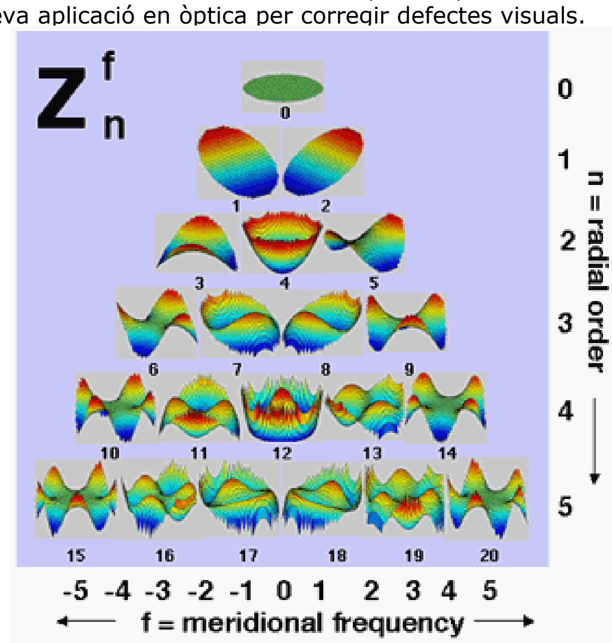
Demana a un company que memoritzi una figura de l'últim quadre, però que no digui quin. Tu per telepatia l'endevinaràs. Pregunta-li si la figura escollida està en cada una de les següents targetes

SÍ = 1 NO = 0 NO = 0 SÍ = 1 NO = 0

Amb cada resposta afirmativa escriu un 1, amb la negativa un 0, per al resultat **1**00**1**0, la figura és la **1**$\cdot 2^4$+**1**$\cdot$2=18, el cercle verd. Només s'ha de calcular el valor en 2 dels polinomis els coeficients dels quals s'obtenen amb 1 o 0, amb Sí o No.

Els polinomis en altres ciències

Si investigues en la web, és probable que trobis molts polinomis amb nom propi: Polinomis de Lagrange, Hermite, Newton, Chevichev... copiem aquí un extracte d'un blog que parla dels polinomis de Zernike i la seva aplicació en òptica per corregir defectes visuals.



...Les matemàtiques, amb els polinomis de Zernike, ens ofereixen un mètode per descompondre superfícies complexes en els seus components més simples. **Així, amb aquest procediment matemàtic podem jerarquitzar i definir totes les aberracions visuals**. Un esquema que està present amb molta freqüència en les consultes de cirurgia refractiva és el de les diferents aberracions agrupades i jerarquitzades:

El de la jerarquia es fonamental, perquè segons quin sigui el grup de l'aberració, tindrà més o menys importància, serà més o menys fàcil de corregir, etc. Per exemple, el nombre 4 correspon a la miopia (i el seu invers, la hipermetropia), i el 3 i 5 corresponen a l'astigmatisme...

Extracte de la pàgina http://ocularis.es/blog/?p=29

Recorda el més important

Expressió en coeficients

$-4x^3 - x^2 + 3$

-4	-1	0	3

Divisió de Polinomis

$12x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 9x + 6$	$4x^2 + 2x + 3$
$-12x^4 - 6x^3 - 9x^2$	$3x^2 + x + 1$ quocient
$4x^3 + 6x^2 + 9x + 6$	
$-4x^3 - 2x^2 - 3x$	
$4x^2 + 6x + 6$	
$-4x^2 - 2x - 3$	
$4x + 3$ residu	

Regla de Ruffini. Teorema del residu

El residu de la divisió per x-a és el valor numèric del dividend en a

3	-5	0	1	1	-2
-3	6			3 1 2 quocient	
	1	0			
	-1	2			
		2	1		
		-2	4		
			5 residu		

T. del residu: $5=3\cdot 2^3-5\cdot 2^2+1$

Regla de Ruffini

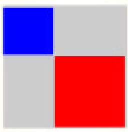
	3	-5	0	1	
2		6	2	4	
	3	1	2	5	residu

quocient

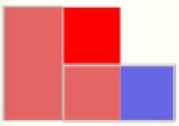
Arrels d'un polinomi

Arrel 2	Arrel -2
P(2)=0	P(-2)=0
Divisor x-2	Divisor x+2

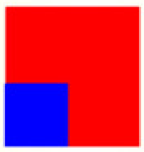
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$



$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$



$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$



Descomposició factorial

Els polinomis amb coeficients en IR **primers** són els de **grau u** i els de **grau dos**, ax^2+bx+c, **amb $b^2-4ac<0$**

Arrel d'un polinomi

Arrel a

Divisor x-a

P(a)=0

Les arrels enteres d'un polinomi són divisors del terme independent

Per trobar la descomposició factorial d'un polinomi es tindran en compte les eines següents:

- Regla de Ruffini
- Equació de 2n grau
- Identitats notables

$P(x)=x^4+5x^3+x^2-21x-18$

Provant la regla de Ruffini (amb divisors de 18), trobem que -1 i 2 són arrels d'aquest polinomi

	1	5	1	-21	-18
-1)		-1	-4	3	18
	1	4	-3	18	0
2)		2	12	-18	
	1	6	9	0	

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+6x+9)$

$P(x)=x^4+5x^3+x^2-21x-18$

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+6x+9)$

El polinomi de segon grau x^2+6x+9 es pot descompondre resolent l'equació $x^2+6x+9=0$ que dóna una solució doble, -3, i es pot reconèixer la identitat notable $x^2+6x+9=(x+3)^2$

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)^2$

Autoavaluació

1. Troba los coeficients de $P(x)\cdot Q(x)+ P(x)\cdot R(x)$ sent $P(x)=3x+2$, $Q(x)=2x^2-5$ i $R(x)=x^2+8x$.

2. Escriu els coeficients del quocient i del residu en la divisió de $2x^3-5x^2+5$ entre x^2+5.

3. Calcula el valor numèric de $-3x^3-5x^2+3$ en $x=-1$

4. És certa la igualtat $2x^2+20x+25=(2x+5)^2$?

5. Calcula m perquè el residu de la divisió de $4x^2+mx+1$ entre $x+5$ sigui 2.

6. Si $P(x)=ax^2+bx+5$ i $a\cdot 6^2+b\cdot 6=3$, quin és el residu de la divisió de $P(x)$ entre $x-6$?

7. Troba una arrel entera del polinomi $x^3+5x^2+8x+16$

8. Troba la descomposició factorial de $-4x^2+12x+112$.

9. El polinomi $5x^3+9x^2-26x-24$ té per arrels 2 i -3. Quina és l'altra arrel?

10. Les arrels d'un polinomi de grau 3 són -6, 0 i 4. Calcula el valor numèric del polinomi en 2 sabent que el seu coeficient de major grau és 3.

Solucions dels exercicis per practicar

1. $100x+14y$
2. grau 5; c. gr 3→-1; c. gr 2→3;
   vn en 2→68
3. $-14x^2-2x$
4. $3x^5-4x^4-20x^3+30x^2-7x-14$
5. Quocient $-x-3$ Residu $7x-10$
6. Quocient $x^2+6x+14$ Residu 25
7. -33
8. a) 1/4 b) 5/7
9. a) $(3x+2)^2=9x^2+12x+4$
   b) $(2x-4)^2=4x^2-16x+16$
   c) $(x-5)^2=x^2-10x+25$
10. a) $(x+6)^2\,(x-6)^2$
    b) $(x+4)(x-2)(x^2+4)$
11. a) $3(x-1/3)(x-3)$
    b) No descompon
12. a) $(x+4)/3$
    b) $3(x+2)/(x-2)$
    c) $(2x+1)/(3\cdot(2x-1))$
13. $12x^{10}\cdot(x^2+2)$
14. a) $3x^5(x-3)(x-4)(x-6)$
    b) $3x^6(x+2)(x+1)^2$
15. $2(x+5)(x-7)(x-1)$
16. $23^2-22^2=(23+22)\cdot(23-22)=45$

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. 9 30 1 -10
2. Quocient $2x-5$, residu $-10x+30$
3. 1
4. No, $(2x+5)^2=4x^2+20x+25$
5. $m=19{,}8$
6. 8
7. -4
8. $-4(x+4)\cdot(x-7)$
9. $-0{,}8$
10. -96

No oblidis enviar les activitats al tutor ▶