Unitat 2: potències i radicals

Resum de teoria, exemples i activitats de repàs

Contingut

---

1. POTÈNCIES I LES SEVES PROPIETATS

Definició

Una **potència** és una manera abreujada de representar una multiplicació els factors de la qual són sempre el mateix nombre.El factor s'anomena **base** i el nombre de vegades que aquest apareix, **exponent**.

$a^n = a \cdot a \cdot .... \cdot a \rightarrow a$ és la base i n és l'exponent

Exemple resolt. Calcula:

a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
b) $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$
c) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 64$
d) $(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot ... \cdot (-2) = +64$

Potència de base negativa

De què depèn el signe d'una potència de base negativa?

- Si una potència de base negativa té un exponent parell, el resultat és un nombre positiu.
- Si una potència de base negativa té un exponent senar, el resultat és un nombre negatiu.

Dit d'una altra manera:

- Si n és parell: $(-a)^n = +a^n \rightarrow$ Exemple: $(-2)^2 = +2^2 = 4$
- Si n és senar: $(-a)^n = -a^n \rightarrow$ Exemple: $(-2)^3 = -2^3 = -8$

Practiquem

- Calcula sense utilitzar la calculadora i comprova amb la calculadora. Fixa't bé amb els signes i els parèntesis:

a) $-2^2 =$

b) $(-2)^2 =$

c) $2^2 =$

d) $-2^3 =$

e) $(-2)^3 =$

f) $2^2 =$

Potències d'exponent negatiu

També existeixen potències d'**exponent negatiu** i segueixen la propietat següent:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \rightarrow \text{Exemple: } 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

Tenint en compte aquesta mateixa propietat, en cas de tenir una **base en forma de fracció**:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \rightarrow \text{Exemple: } \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5}$$

Exemple resolt. Calcula el resultat de les potències següents:

a) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(-\frac{2}{1}\right)^{4} = (-2)^4 = +2^4 = 16$

Propietats de les potències

Les propietats de les potències ens ajuden a fer les operacions més fàcilment.

Propietats	Exemples resolts
1) $a^0 = 1\ (sempre\ que\ a \neq 0)$	$\rightarrow 2^0 = 1$
2) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\rightarrow 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$
3) $a^n : a^m = a^{n-m}$	$\rightarrow 2^3 : 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$
4) $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$	$\rightarrow \left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$
5) $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$	$\rightarrow 2^2 \cdot 3^2 = (2\cdot 3)^2 = 6^2 = 36$
6) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\rightarrow \frac{4^2}{2^2} = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$

Practiquem

- Escriu com a potència d'exponent negatiu:

a) $\frac{1}{2^5} =$

b) $-\frac{1}{3^7} =$

c) $\frac{5}{5^4} =$

d) $\frac{6}{6^2} =$

- Opera i dóna el resultat en forma de potència. Utilitza les propietats i vigila amb els signes:

a) $(-2)^3 \cdot 2^{-4} \cdot (-2)^{-1} =$

b) $(-6)^2 : 6^{-2} \cdot (-6)^6 =$

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{7}\right)^{-5} : \left(\frac{1}{7}\right)^{9} =$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} =$

e) $\left[9^5 : (-3)^5\right]^{-1} =$

---

2. RADICALS

Definició

L'**arrel *n*-èssima** d'un nombre a es representa:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b}$$

- n és **l'índex** de l'arrel
- a és el **radicand**
- b és **l'arrel** (solució)
- $\sqrt[n]{a}$ és el **radical**

L'**operació inversa a la radicació és la potenciació**:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a}$$

Exemple resolt. Calcula les arrels següents amb la definició:

a) $\sqrt[3]{125} = 5$ ja que $5^3 = 125$
b) $\sqrt[7]{128} = 2$ ja que $2^7 = 128$

Arrels d'un radical

Depenent de si l'**índex és parell o imparell i el radicand positiu o negatiu**, els radicals tenen diferents tipus de solucions. Al quadre següent es resumeixen els diferents casos possibles:

	Radicand	Índex	Nombre d'arrels	Calculadora	Exemple
$\sqrt[n]{a}$	$a > 0$	n senar	1 arrel: positiva	✔️	$\sqrt[3]{8} = 2$
		n parell	2 arrels: positiva i negativa	❌ (només dóna l'arrel +)	$\sqrt{4} = \pm 2$
	$a = 0$	n parell o senar	1 arrel: $\sqrt[n]{0} = 0$	✔️	$\sqrt[8]{0} = 0$
	$a < 0$	n senar	1 arrel: negativa	✔️	$\sqrt[3]{-8} = -2$
		n parell	No té arrels	✔️ (Math error)	$\sqrt{-4} = \exists$

Practiquem

- Indica l'índex i el radicand dels següents radicals:
  a) $\sqrt[3]{-125}$
  b) $\sqrt[4]{-16}$
  c) $\sqrt{16}$
  d) $\sqrt[5]{64}$

- Troba el resultat (utilitzant la calculadora) i el nombre d'arrels dels radicals de l'exercici anterior.

3. POTÈNCIES D'EXPONENT FRACCIONARI I RADICALS

Definició

Una potència d'exponent fraccionari és equivalent a un radical, seguint la relació següent:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemple resolt. Expressa les potències d'exponent fraccionari en forma de radical i al revés:

a) $5^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{5^7}$

b) $7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7^1} = \sqrt[3]{7}$

c) $\sqrt{2^{-7}} = 2^{-\frac{7}{2}}$

d) $\sqrt[5]{(-2)^3} = (-2)^{\frac{3}{5}}$

Radicals equivalents

Dos **radicals** $\sqrt[n]{a^m}$ i $\sqrt[q]{b^p}$ **són equivalents** si, quan s'expressen en forma de potència d'exponent fraccionari $a^{\frac{m}{n}}$ i $b^{\frac{p}{q}}$, **compleixen les DUES condicions** següents:

1) Les bases són **iguals**: $a = b$
2) Les fraccions dels exponents són **equivalents**: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

Exemple resolt. Digues si els següents radicals són equivalents:

a) $\sqrt[5]{-7}$ i $\sqrt[10]{(-7)^2}$

- Expressem en forma de potència:$(-7)^{\frac{1}{5}}$ i $(-7)^{\frac{2}{10}}$
- Tenen la mateixa base?Sí. (-7)=(-7) ✔️
- Les fraccions dels exponents són equivalents? Sí. $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ = 0,2 ✔️
- **Conclusió: són radicals equivalents perquè es compleixen les dues condicions.**

b) $\sqrt[4]{3^3}$ i $\sqrt[8]{5^6}$

- Expressem en forma de potència: $3^{\frac{3}{4}}$ i $5^{\frac{6}{8}}$
- Tenen la mateixa base? No. $3 \neq 5$ ❌
- Les fraccions dels exponents són equivalents? Sí. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ = 0,75 ✔️
- **Conclusió: NO són radicals equivalents, perquè una condició no es compleix.**

Practiquem

- Passa els següents radicals a potències d'exponent fraccionari:

  a) $\sqrt{2} =$

  b) $\sqrt[5]{3^2} =$

  c) $\sqrt[3]{(-3)^5} =$

  d) $\sqrt[4]{8^3} =$

- Passa les següents potències a radicals:

  a) $3^{\frac{1}{2}} =$

  b) $2^{\frac{2}{5}} =$

  c) $(-5)^{\frac{3}{2}} =$

  d) $300^{\frac{1}{5}} =$

- Digues si els següents radicals són equivalents i justifica la resposta:

  a) $\sqrt[3]{2}$ i $\sqrt{2^3}$

  b) $\sqrt[4]{3^6}$ i $\sqrt{3^3}$

Eines per operar amb radicals

Per a poder operar amb radicals, sovint necessitarem primer modificar els radicals i així poder operar més fàcilment. Podem utilitzar diferents eines, aquí n'expliquem tres:

1) Reducció de radicals a un índex comú: ens pot interessar que tots els radicals tinguin el mateix índex. Podrem igualar-los expressant el radical en forma de potència d'exponent fraccionari i trobant un denominador comú.

Exemple resolt amb passos. Redueix $\sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{7^4}$ a un índex comú

- Expressem com a potència d'exponent fraccionari: $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ $\quad \sqrt[3]{7^4} = 7^{\frac{4}{3}}$
- Volem que tinguin el mateix denominador, per tant, busquem el mínim comú múltiple dels denominadors dels exponents: m.c.m.(2,3) = 6
- Apliquem el mínim comú múltiple a les fraccions de l'exponent:
  $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}}$ $\qquad \sqrt[3]{7^4} = 7^{\frac{4}{3}} = 7^{\frac{8}{6}}$
- Passem els resultats a radical i veiem que ara ja tenen el mateix índex (ara l'índex és 6): $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5^3}$ $\qquad \sqrt[3]{7^4} = 7^{\frac{4}{3}} = 7^{\frac{8}{6}} = \sqrt[6]{7^8}$

2) Simplificació de radicals: pot ser útil simplificar radicals. Per fer-ho, els expressem en forma de potència d'exponent fraccionari i reduïm la fracció de l'exponent al màxim.

Exemple resolt amb passos. Simplifica el següent radical $\sqrt[10]{2^5}$

- L'expresso en forma de potència d'exponent fraccionari $\sqrt[10]{2^5} = 2^{\frac{5}{10}}$
- Simplifiquem el màxim la fracció de l'exponent per trobar la fracció reduïda. En aquest cas, dividim el numerador i el denominador entre 5: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
- Expressem la potència amb la fracció reduïda: $\sqrt[10]{2^5} = 2^{\frac{5}{10}} = 2^{\frac{1}{2}}$
- Passem el resultat a radical una altra vegada: $\sqrt[10]{2^5} = 2^{\frac{5}{10}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$

3) Introduir i extreure factors d'un radical: a vegades potser necessitarem introduir o extreure factors d'un radical. Ho veiem amb exemples:

Extreure factors: exemple resolt amb passos. Extreu els factors que puguis del radical següent: $\sqrt[3]{162}$

- **Descomponem** el radicand: $162 = 2 \cdot 3^4$, per tant, $\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^4}$
- Analitzem els factors de la descomposició:
    - Si l'**exponent dels factors és més petit que l'índex de l'arrel**, **NO poden sortir del radical**:

      Tornem a l'exemple: el 2 no té exponent, per tant, és 2^1. Sabem que l'índex del radical és 3. Com que $1 < 3$, no puc treure el 2 de l'arrel.
    - Si l'**exponent dels factors és més gran que l'índex de l'arrel**, hem de treballar una mica: dividim exponent / índex. El resultat de la divisió ens indica l'exponent que hem de posar fora de l'arrel i el residu l'exponent que hem de deixar dins de l'arrel. **Surten multiplicant!**

      Tornem a l'exemple: el factor 3^4 té exponent 4. L'índex del radical és 3. Per tant, 4 > 3. Dividim:

$3^1 \rightarrow$ surt del radical multiplicant

$3^1 \rightarrow$ es queda dins el radical multiplicant

El resultat és: $\sqrt[3]{162} = 3\sqrt[3]{2 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{6}$

Introduir factors: exemple resolt amb passos. Introdueix els factors al radical: $4\sqrt[3]{5}$

- Introduir els factors és molt simple: els introduïm dins l'arrel elevats a l'índex d'aquesta. **Recordem que entren multiplicant!**
- Anem a l'exemple: només tenim un factor fora l'arrel, el 4. Així doncs, el 4 entra dins l'arrel elevat a l'índex d'aquesta. L'índex de l'arrel és 3, per tant, entra com 4^3
- Ens quedaria de la següent manera: $4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 4^3} = \sqrt[3]{320}$

Practiquem

- Expressa les arrels següents amb el mateix índex: $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[3]{2}$ i $\sqrt[9]{5^4}$

- Simplifica el següent radical $\sqrt[4]{5^{10}}$

- Extreu els factors que puguis del radical: $\sqrt{720}$

- Introdueix els factors al radical: $4 \cdot \sqrt[3]{2}$

---

4. OPERACIONS AMB RADICALS

Només podrem realitzar operacions amb aquells **radicals que tinguin el mateix índex**.

‼Si tenen índex diferents, **però són equivalents**, també podem realitzar les operacions, però abans d'aplicar les propietats següents, hem de **reduir els radicals a un índex comú.**

Producte de radicals	Quocient de radicals
$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$ Exemple: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}$	$\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$ Exemple: $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{10}{5}} = \sqrt{2}$
Potència d'un radical	**Arrel d'un radical**
$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$ Exemple: $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5 = \sqrt[3]{2^5}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ Exemple: $\sqrt[2]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[2 \cdot 3]{4} = \sqrt[6]{4}$

Suma de radicals	Resta de radicals
Han de tenir el mateix índex i radicand. Sumarem els coeficients de davant els radicals. $x\sqrt[m]{a} + y\sqrt[m]{b} = (x + y)\sqrt[m]{a}$ Exemple: $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (3 + 2)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$	Han de tenir el mateix índex i radicand. Restarem els coeficients de davant els radicals. $x\sqrt[m]{a} - y\sqrt[m]{b} = (x - y)\sqrt[m]{a}$ Exemple: $4\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{3} = (4 - 2)\sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3}$

Practiquem

- Expressa el resultat com a una única arrel i simplifica'l al màxim:

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{12} =$

b) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^3 =$

c) $\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{4}} =$

e) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3^3}}{\sqrt{75}} =$

f) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} =$

g) $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} =$

5. ACTIVITATS DE REPÀS DE LA UNITAT 2

Repassa la unitat fent les activitats següents. Sempre pots agafar la calculadora per comprovar les teves respostes. Si no tens espai aquí, fes-les a la llibreta.

1) Fes les operacions següents i expressa en forma de potència única:

a) $(-6)^{-4}\cdot(-6)\cdot(-6)^{-3} =$

b) $\left(\frac{-1}{6}\right)^{4}\cdot 6^{-5} : \frac{1}{6^{-7}} =$

c) $\frac{3^{4}:\left(3^{-6}:3^{5}\right)}{3^{-2}\cdot 3^{7}} =$

d) $\left(5^{-4}\cdot 6^{-4}\right) : 30^{-1} =$

e) $54^{2} : 2^{2} : 3^{2} =$

f) $\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{-2} : \left(\frac{5}{6}\right)^{-4} =$

g) $\left(6^{-3}\cdot 8^{-3}\right)^{2} =$

h) $\left[45^{-2} : (-3)^{-2}\right]^{4} =$

i) $\frac{3^{-4}\cdot 16\cdot 9^{-1}}{8^{2}\cdot 3^{-5}\cdot 2^{-3}} =$

j) $\frac{(-5)^{3}\cdot(-8)^{4}\cdot 9^{-2}}{(-3)^{-4}\cdot 2^{7}\cdot 25^{5}} =$

k) $\left[\left(\frac{-1}{4}\right)^{-4} : 4^{3} : \left(\frac{1}{4}\right)^{-5}\right]^{-2} =$

2) Donats els radicals següents, contesta:

$\sqrt[4]{8}$ $\sqrt[3]{-5}$ $\sqrt[3]{5}$ $\sqrt[12]{2^{9}}$ $\sqrt[6]{25}$ $\sqrt{-4}$

a) Indica l'índex i el radicand.
b) Indica el nombre d'arrels i troba les solucions amb la calculadora.
c) Expressa els radicals en forma de potència d'exponent fraccionari.
d) Busca si hi ha algun radical que sigui equivalent.

3) Redueix els següents radicals a índex comú:

a) $\sqrt[5]{7}, \sqrt[10]{2^{3}}\ i\ \sqrt[4]{5^{3}}$

b) $\sqrt{12}, \sqrt[3]{3^{2}}\ i\ \sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{3}\ i\ \sqrt{2}$

4) Extreu els factors que puguis del radical:

a) $\sqrt{27} =$

b) $\sqrt{72} =$

c) $\sqrt[3]{54} =$

d) $\sqrt[4]{144} =$

e) $\sqrt[6]{3^{12} \cdot 4^{15}} =$

f) $\sqrt[3]{16a^{5} \cdot b^{4}} =$

5) Opera, simplificant al màxim, si és possible. Ens alguns casos és possible que, abans d'operar, necessitis reduir els radicals a índex comú o extreure factors dels radicals.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{15} =$

b) $\frac{10\sqrt{10}}{5\sqrt{5}} =$

c) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} =$

d) $\left(-\sqrt{2}\right)^{4} =$

e) $\left(-\sqrt{2}\right)^{3} =$

f) $\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{\sqrt[3]{2}} + 2\sqrt[6]{2}\right) =$

g) $4\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 8\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 6\sqrt{7} =$

h) $\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} =$

i) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{2} =$

j) $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} =$

k) $14 + \sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{250} =$