LOGARITMES

Si tenim a i b nombres reals estrictament positius i a diferent de 1, anomenem logaritme en base a de b $\log_a b$ a l'exponent x amb que cal elevar la base a per que ens doni b,

$$\mathbf{a,b>0 \text{ i } a \neq 1 \quad x=\log_a b \Leftrightarrow a^x = b}$$

Exemples:

- $\log_2 8=3$ (doncs $2^3=8$)
- $\log_3 81=4$ (al ser $3^4=81$)
- $\log_{1/2} 32=-5$ (ja que $(1/2)^{-5}=32$

Els logaritmes més usuals són els

- logaritmes decimals que tenen per base 10 i se'ls escriu com $\log\ b = x$
  $\log 10000=4$; $\log 0.01= -2$, log
- logaritmes neperians on la base és el número **e** i se'ls escriu com $\ln b = x$.

PROPIETATS

- $\mathbf{\log_a a=1}$ doncs $\log_a a=x \Leftrightarrow a^x=a \Leftrightarrow x=1$.

- $\mathbf{\log_a 1=0}$ ja que $\log_a 1=x \Leftrightarrow a^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

- $\mathbf{\log_a a^x=x}$ doncs : $\log_a a^x=y \Leftrightarrow a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$.

- **Logaritme d'un producte és la suma dels logaritmes.**

  $\mathbf{\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c}$ **essent b i c >0 .**

  ja que:
  S i $x = \log_a b$ i $y= \text{lob}_a c \Rightarrow a^x=b$ i $a^y=c$
  multiplicant $b\cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
  I per la definició de logaritme $\log_a(b\cdot c)= x+y$.

- **Logaritme d'un quocient és la diferència dels logaritmes.**

  $\mathbf{\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c}$ **essent b i c >0.**

  ja que:
  S i $x = \log_a b$ i $y= \text{lob}_a c \Rightarrow a^x=b$ i $a^y=c$
  dividint $b/c = a^x / a^y = a^{x-y}$.
  I per la definició de logaritme $\log_a(b/c)= x-y$.

- **Logaritme d'una potencia és l'exponent pel logaritme de la base de la potència.**

  $\mathbf{\log_a b^r = r\cdot\log_a b}$ **, on** $\mathbf{b\in R^+}$ **i** $\mathbf{r\in R}$

  doncs
  Si $x=\log_a b \Rightarrow a^x = b$.

Elevant a r $b^r = (a^x)^r = a^{x\cdot r} = a^{r\cdot x} \Rightarrow \log_a b^r = r\cdot x$
és a dir $\log_a b^r = r\cdot\log_a b$

- **Canvi de base** $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.

  ja que
  Si $x = \log_a c$ i $y = \log_b a \Rightarrow a^x = c$ i $b^y = a \Rightarrow$
  $c = a^x = (b^y)^x = b^{x\cdot y} \Rightarrow \log_b c = x\cdot y$
  és a dir $\log_b c = \log_a c \cdot \log_b a$
  i passant $\log_b a$ dividint a l'altre membre obtenim $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.