materials del curs de:

MATEMÀTIQUES

SISTEMES D'EQUACIONS

EXERCICIS - SOLUCIONS

AUTOR:

Xavier Vilardell Bascompte

xevi.vb@gmail.com – www.xelu.net

ÚLTIMA REVISIÓ:

21 d'abril de 2009

Centre de Formació Permanent d'Osona Sud

Aquests materials han estat realitzats per donar les classes al

Centre de Formació Permanent d'Osona Sud.

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB DUES INCÒGNITES

L'equació $x + y = 3$ és una equació de primer grau amb dues incògnites: x i y. Per calcular les solucions escollim un valor qualsevol per a la incògnita x, substituïm la x per aquest valor i calculem el valor de la y. Així obtindrem parells de nombres que són possibles solucions de l'equació. Aquestes solucions les col·loquem en una taula de valors.

Exemple 1:

Calculem les possibles solucions de l'equació $x + y = 3$

Per a facilitar el càlcul aïllem la incògnita y

$y = 3 - x$

Quan $x=1$ tenim que $y = 3 - 1 = 2$

Quan $x=2$ tenim que $y = 3 - 2 = 1$

I així successivament. Si escrivim tot això en una taula de valors tenim:

X	Y
1	2
2	1
3	0
4	-1
0	3
-1	4
-2	5

Exemple 2:

Calculem les possibles solucions de l'equació $-x - y = 5$

Aïllem la y i ens queda: $-y = 5 + x$

Canviem el signe dels termes de l'equació per fer la y positiva.

$y = -x - 5$

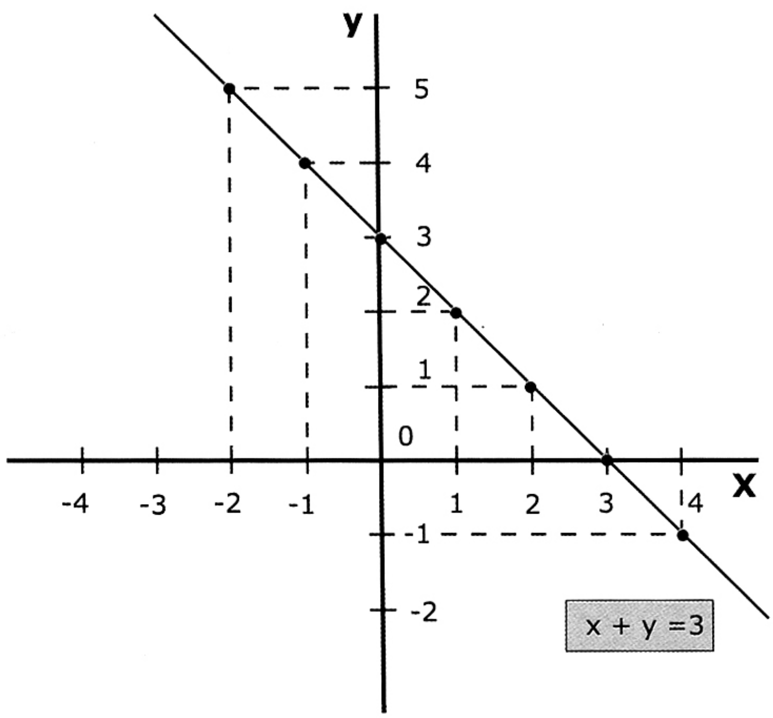
La taula de valors resultant és:

X	Y
1	-6
2	-7
0	-5
-1	-4
-2	-3

REPRESENTACIÓ GRÀFICA D'EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB DUES INCÒGNITES

Recordem que una taula de valors es pot representar en uns eixos de coordenades cartesianes. Cada parell de solucions és un punt de la gràfica. Tornem a l'equació x + y = 3 del primer exemple, recuperem la taula de valors i representem els punts.

x	y
1	2
2	1
3	0
4	–1
0	3
–1	4
–2	5



Representació gràfica de l'equació.

Quan tracem la línia que uneix els punts obtenim una recta. Podem dir que l'equació **x + y = 3 és l'equació de la recta** que hem obtingut.

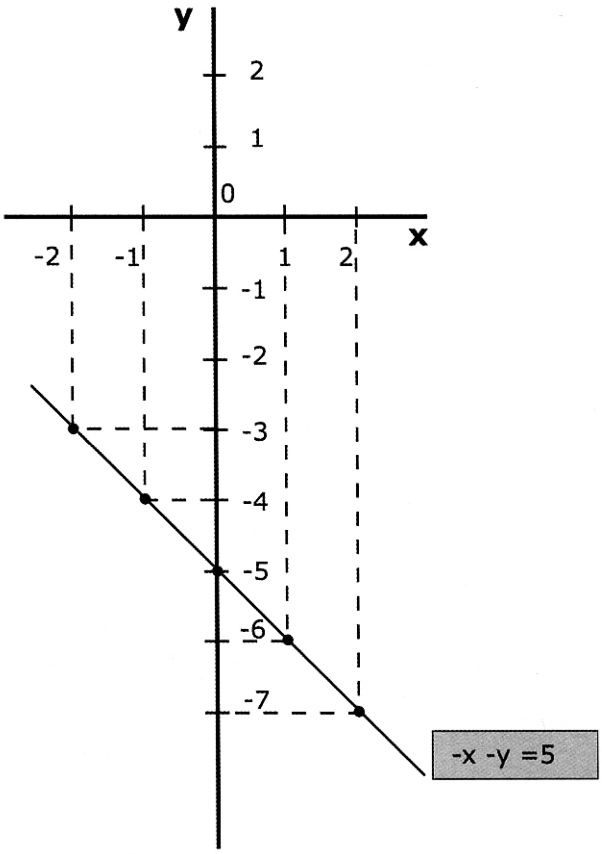
Si representem en els eixos de coordenades l'equació del segon exemple, quin tipus de gràfica sortirà? Creus que sortirà una recta?

Provem-ho.

Equació: -x - y = 5

Taula de valors:

x	y
1	−6
2	−7
0	−5
−1	−4
−2	−3



Representació gràfica de l'equació.

Ha sortit una recta i com en el cas anterior podem dir que -x - y = 5 és la seva equació. Si representéssim més equacions de primer grau amb dues incògnites comprovaríem aquest resultat.

La representació gràfica d'una equació de primer grau és sempre una recta.

Les equacions de primer grau amb dues incògnites també s'anomenen equacions lineals.

EXERCICI 1

Representa de forma gràfica les següents equacions lineals. Calcula prèviament la taula de valors.

a) x - y = -4

b) $Y = \frac{2x}{3}$

c) 5x + y = 2

d) 3x + 2y = 1

SISTEMES D'EQUACIONS

Què passaria si representéssim dues equacions lineals en uns mateixos eixos de coordenades?

Suposem les equacions x + y = -3 i x - y = 1

· Per fer la representació de l'equació x + y = −3.

Aïllem y ⟶ y = −3 -x.

Calculem la taula de valors:

x	y
1	−4
2	−5
0	−3
−1	−2
−2	−1

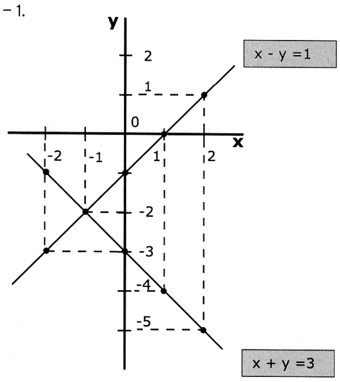
· Fem la representació de la segona equació x −y = 1.

Aïllem y ⟶ −y = −x + 1.

Fem la y positiva ⟶ y = x − 1.

Calculem la taula de valors:

x	y
1	0
2	1
0	−1
−1	−2
−2	−3



Representació gràfica de les dues equacions sobre els mateixos eixos de coordenades.

Fixa't que les dues equacions es tallen en un punt x = -1 i la y = -2.
El punt on es tallen les dues rectes s'anomena punt d'intersecció.

Les coordenades d'aquest punt (-1,-2), són a la vegada solució de la primera i de la segona equació.

Podem dir que:
les equacions x + y = -3 i x - y = 1 formen un sistema de dues equacions amb dues incògnites i ho escriurem de la manera següent:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

la solució d'aquest sistema és x = -1 i y = -2, que són les coordenades del punt d'intersecció de les rectes.

Podem pensar que sempre que hi ha un sistema hi ha un punt d'intersecció de les rectes?
Esbrinem-ho.
Fem la representació gràfica del sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ -x + y = 1 \end{array}\right\}$$

Calculem la taula de valors de cada una de les equacions.

Les dues rectes obtingudes són rectes paral·leles que no tenen cap punt en comú. **Per tant, el sistema no té solució.**

· Equació: $x - y = 2$

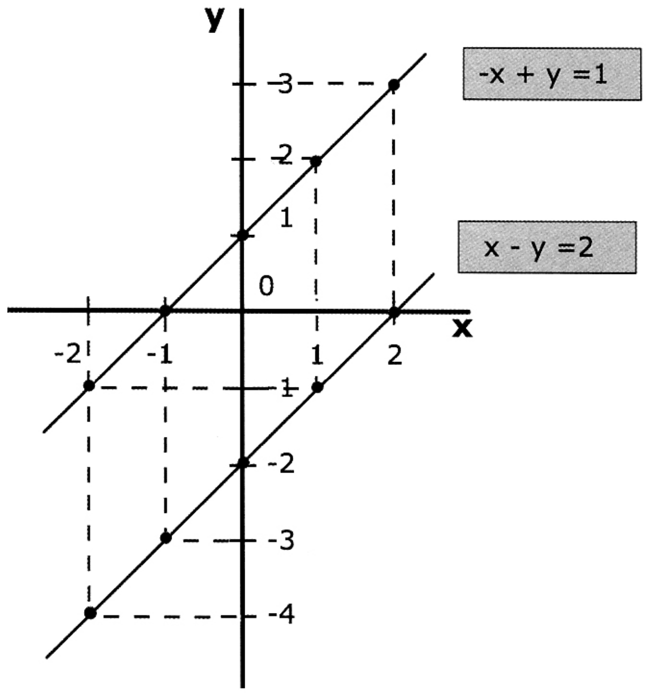
$y = x - 2$

x	y
1	−1
2	0
0	−2
−1	−3
−2	−4

· Equació: $-x + y = 1$

$y = 1 + x$

x	y
1	2
2	3
0	1
−1	0
−2	−1



Representació gràfica de les dues equacions sobre els mateixos eixos de coordenades.

Fem la representació gràfica d'un altre sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 6x + 2y = 2 \\ 3x + y = 1 \end{array}\right\}$$

Calculem la taula de valors de cada una de les equacions.

Les dues rectes coincideixen. Això vol dir que les seves equacions són equivalents. **El sistema té infinites solucions.**

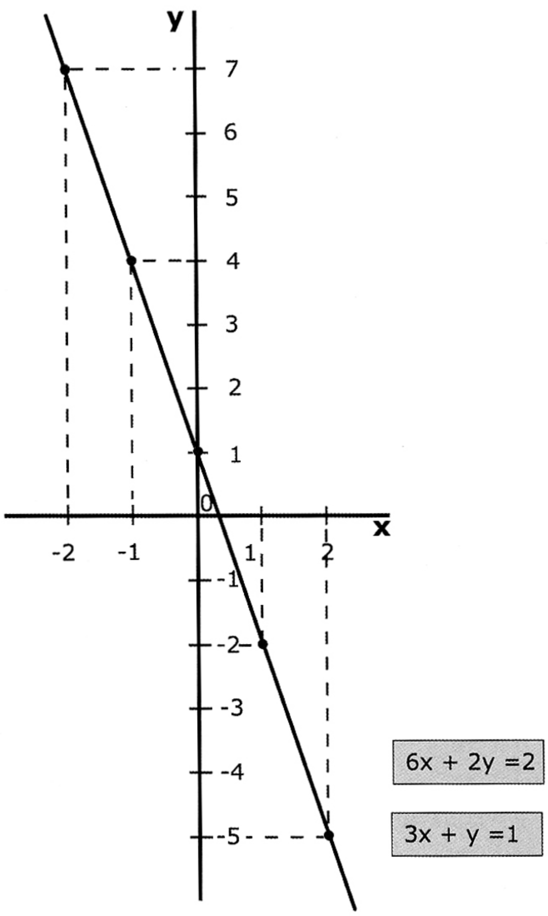
· Equació: $6x + 2y = 2$

x	y
1	−2
2	−5
0	1
−1	4
−2	7

· Equació: $3x + y = 1$

$y = 1 - 3x$

x	y
1	−2
2	−5
0	1
−1	4
−2	7



Representació gràfica de les dues equacions sobre els mateixos eixos de coordenades.

La representació gràfica d'un sistema de dues equacions amb dues incògnites pot:

- Tenir un punt en comú. El sistema té una única solució. Les rectes es tallen.
- No tenir cap punt en comú. El sistema no té solució. Les rectes són paral·leles.
- Tenir tots els punts en comú. El sistema té infinites solucions. Només és una recta.

MÈTODES DE RESOLUCIÓ DE SISTEMES D’EQUACIONS

MÈTODE D’IGUALACIÓ

a) S’aïlla la mateixa incògnita en les dues equacions.
b) S’igualen les dues expressions obtingudes.
c) Es resol l’equació.
d) Es calcula el valor de la segona incògnita substituint el valor obtingut de la primera en una de les dues equacions.

MÈTODE DE SUBSTITUCIÓ

a) S’aïlla una incògnita d’una de les dues equacions.
b) Se substitueix l’expressió obtinguda en l’altra equació.
c) Es resol l’equació obtinguda.
d) Es calcula el valor de la segona incògnita.

MÈTODE DE REDUCCIÓ

a) S’ha d’aconseguir que les dues equacions tinguin un terme oposat. Recordem que un terme oposat és un terme igual, però amb signe contrari. Per a aconseguir-ho s’apliquen les propietats de les equacions (multiplicar o dividir termes).
b) Se sumen les equacions obtingudes.
c) Es resol l’equació resultant.
d) Es calcula el valor de la segona incògnita.

EXERCICI 2

Representa gràficament el següent sistema d'equacions. Quin és el punt d'intersecció de les rectes? Quina és la solució del sistema?

$$\left.\begin{array}{l} x - y = -1 \\ 2x + y = 7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ \dfrac{x}{3} + y = -1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 4 \\ 6x + 2y = 4 \end{array}\right\}$$

EXERCICI 3

Resol els següents sistemes aplicant el mètode d'igualació.

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 2 \\ x + y = 11 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x - 9y = -2 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$$

EXERCICI 4

Resol els següents sistemes aplicant el mètode de substitució.

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ x - y = -5 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \\ \dfrac{x}{5} + y = 16 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y = 13 \\ 5x - y = 23 \end{array}\right\}$$

EXERCICI 5

Resol els següents sistemes aplicant el mètode de reducció.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 6y = 2 \\ 7x - 2y = 54 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 8 \\ 4y - 3x = 16 \end{array}\right\}$$

PROBLEMES

1. La diferència entre dos nombres és 3. La meitat del més gran més el triple del més petit és 12. Quins són aquests nombres?

2. Hem barrejat cafè de 6€/kg amb cafè de 9€/kg i hem obtingut una barreja de 300Kg que costa 7€/kg. Quants quilos de cafè hem posat de cada classe?

3. El perímetre d'un rectangle fa 16cm. Quines són les seves dimensions si la base és 2 cm més gran que l'altura.

4. La Consol té 8 anys més que la Maria. D'aquí a 6 anys el triple de l'edat de la Consol serà igual a sis vegades la de la Maria. Quants anys té cada una?

5. Dos nombres sumen 48. Si sumem 4 al quocient que s'obté en dividir un per l'altre el resultat dóna 9. De quins nombres estem parlant?

6. A veure una pel·lícula hi han anat 100 persones entre homes i dones. Abans d'acabar la pel·lícula han sortit 10 homes i, aleshores, ha quedat el doble nombre de dones que d'homes. Quants homes i dones han anat al cine?

7. En Carles té 36 anys més que el seu fill. Quines edats tenen en Carles i el seu fill si d'aquí a 4 anys l'edat d'en Carles serà 3 vegades la del seu fill?

8. La tercera part de la suma de dos nombres val 10, i el triple de la diferència més 1 és igual al més petit. Busca aquests dos nombres.

9. Fa quatre anys, en Jordi tenia tres vegades l'edat del seu germà David. Si en Jordi tingués 9 anys més i en David dos menys, l'edat del més gran seria quatre vegades la del més petit. Quina edat té cada un?

10. La suma de les dues xifres d'un nombre és 8. Si invertim l'ordre de les dues xifres, la diferència és 36. De quin nombre es tracta?

11. Hem de pagar un cotxe de 4975 lliures, i només tenim bitllets de 100 i 25 lliures. El cobrador s'emporta 64 bitllets. Quants bitllets de cada classe s'emporta?

12. Un pastor diu a un altre pastor: *Dóna'm una ovella, i així en tindré el doble que tu.* I l'altre li contesta: *Dóna-me'n una tu, i així en tindrem tots dos igual*. Quantes ovelles té cada pastor?

13. Avui al supermercat hem pagat amb 500 pessetes 3 kg de taronges i 2 kg de pomes, i ens han tornat 105 pessetes. Si haguéssim comprat 4 kg de taronges i 1 kg de pomes, el canvi hauria estat de 90 pessetes. A quant hem comprat la fruita?

14. Busca dos nombres tals que el doble del primer menys el triple del segon valgui 5, i que la vuitena part del primer per cinc sigui igual al segon.

15. En una festa d'aniversari hi ha el triple de nenes que de nens. Si havíem preparat dotze bosses de llaminadures i han vingut tots els convidats, quants nens i quantes nenes hi ha a la festa?