

FITXA DE POLINOMIS (2)

Operacions, Teorema del residu, factorització, fraccions algebraiques

1. Desenvolupa i simplifica

- a) $\left(\frac{2}{3}x - 1\right)(3x + 6) + (x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2$
- b) $(x - 1)(x^2 + x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2)$
- c) $(x + 1)^2(3x^2 + 2) - 2(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1)$
- d) $(x^2 - 2x + 3)(2x + 1) - (4x - 1)^2$
- e) $(2x - 3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x - 2)$

2. Troba el quocient i el residu de cada divisió:

- a) $(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 1) : (x^2 + 2)$
- b) $(-3x^4 + 6x^2 + x - 2) : (x - 1)$
- c) $(-2x^4 + 3x^3 - 2x - 3) : (x^2 - 2x - 2)$
- d) $(-x^4 + 2x^2 - x - 2) : (x - 2)$

3. a) Troba el valor numèric de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ per a $x = 1$.

b) És divisible el polinomi anterior, $P(x)$, entre $x - 1$?

4. a) Troba el valor numèric de $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$ per a $x = -1$

b) És divisible el polinomi anterior, $P(x)$, entre $x + 1$?

5. a) Troba el valor numèric de $P(x) = -3x^4 + 6x^2 + x - 2$ per a $x = 1$

b) És divisible el polinomi anterior, $P(x)$, entre $x - 1$?

6. Troba el valor de k per a que la següent divisió sigui exacta

$$(3x^2 + kx - 2) : (x + 2)$$

7. Troba el valor de k per a que el polinomi $P(x) = kx^3 + 2kx^2 - 3x + 1$ sigui divisible entre $x - 1$.

8. Donat el polinomi $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$:

a) Troba el quocient i el residu de la divisió

$$P(x) : (x - 2)$$

b) Quant val $P(2)$?

9. Factoritza els polinomis següents:

a) $x^5 + x^4 - 2x^3$

b) $x^3 - 3x + 2$

c) $x^3 + 2x^2 + x$

d) $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

e) $x^4 - 2x^3 + x^2$

f) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

g) $x^3 - 13x^2 + 36x$

h) $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$

i) $2x^4 - 18x^2$

j) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

10. Descomposa en factors el numerador i el denominador i després simplifica

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^3 + 3x^2 - 16x - 48}$$

11. Simplifica la fracció algebraica:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6}$$

12. Simplifica la fracció algebraica

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3}$$

13. Simplifica la fracció algebraica

$$\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x}$$

14. Simplifica la fracció algebraica

$$\frac{2x^3 + 10x^2 + 16x + 8}{4x^3 + 8x^2 - 4x - 8}$$

15. Calcula y simplifica:

a) $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x - 1}{x - 1} - \frac{3x - 1}{x}$

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \frac{2x - 10}{x^2 - 25}$

16. Efectúa y simplifica:

a) $\left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x + 1}\right)$

b) $1 + \frac{1}{2x - 1} - \frac{2x}{4x^2 - 1}$

17. Opera y simplifica:

$$\frac{x + 1}{x - 2} + \frac{2 + x}{x^2 - 4x + x}$$

18. Opera y simplifica:

a) $\frac{2x}{x + 1} : \left(\frac{2x}{x + 1} - 1\right)$

b) $\frac{x - 2}{2x} - \frac{1 - 3x}{3x^2} + \frac{2x^2 + 3}{6x^4}$

19. Calcula y simplifica:

a) $\frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x}$

b) $\frac{2x + 4}{x + 4} - \frac{2x - 14}{x - 5}$

$$\begin{array}{r}
 \text{c) } \begin{array}{r} -2x^4 + 3x^3 \quad -2x + 3 \\ 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\ \hline -x^3 + 4x^2 - 2x + 3 \\ x^3 - 2x^2 + 2x \\ \hline 2x^2 + 3 \\ -2x^2 + 4x - 4 \\ \hline 4x - 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 - 2x + 2 \\ -2x^2 - x + 2 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Quocient = $-2x^2 - x + 2$
Residu = $4x - 1$

d) Aquesta divisió es pot fer aplicant Ruffini. (També és vàlid l'altre mètode)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\
 -2 & & 2 & -4 & 4 & -6 \\
 \hline
 & -1 & 2 & -2 & 3 & -4
 \end{array}$$

Quocient = $-x^3 + 2x^2 - 2x + 3$
Residu = -4

Exercici 3

a) $P(1) = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$

b) Sí. Pel teorema del residu, sabem que el residu de la divisió $P(x) : (x - 1)$ coincideix amb $P(1)$. En aquest cas $P(1) = 0$, per tant, $P(x)$ és divisible entre $x - 1$.

Exercici 4

a) $P(-1) = 2 + 1 + 3 - 6 = 0$

b) Pel teorema del residu, sabem que el residu de la divisió $P(x) : (x + 1)$ coincideix amb $P(-1)$. En aquest cas $P(-1) = 0$; per tant, $P(x)$ és divisible entre $x + 1$.

Exercici 5

a) $P(1) = -3 + 6 + 1 - 2 = 2$

b) . Pel teorema del residu, sabem que el residu de la divisió $P(x) : (x - 1)$ coincideix amb $P(1)$. En aquest cas $P(1) = 2$; per tant, $P(x)$ NO és divisible entre $x - 1$.

Exercici 6

Tenim el polinomi $P(x) = 3x^2 + kx - 2$.
Per a que la divisió sigui exacta, ha de ser $P(-2) = 0$; és a dir
 $P(-2) = 12 - 2k - 2 = 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$

Exercici 7

Per a que $P(x)$ sigui divisible ente $x - 1$, ha de ser $P(1) = 0$; és a dir:

$$P(1) = k + 2k - 3 + 1 = 3k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Exercici 8

a) Aplicam la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -8 & 3 & 1 \\ 2 & & 8 & 0 & 6 \\ \hline & 4 & 0 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\text{Quocient} = 4x^2 + 3$$

$$\text{Residu} = 5$$

b) Pel teorema del residu, sabem que $P(2) = 5$.

Exercici 9

a) Primer treim factor comú i després trobam les arrels de l'equació de segon grau que queda amb la fórmula

$$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x^2 + x - 2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}, \quad \begin{matrix} x = 1 \\ x = -2 \end{matrix}$$

$$\text{Per tant: } x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x - 1)(x + 1)$$

b) Utilitzant la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

c) Treim factor comú i utilitzam la igualtat notable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$:
 $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

d) Utilitzant la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 7 & -15 \\ 1 & & 1 & 8 & 15 \\ \hline & 1 & 8 & 15 & 0 \\ -3 & & -3 & -15 & \\ \hline & 1 & 5 & 0 & \end{array}$$

$$x^3 + 7x^2 + 7x - 15 = (x - 1)(x + 3)(x + 5)$$

e) Treim factor comú i utilitzam la igualtat notable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$:
 $x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x - 1)^2$

f) Utilitzant la regla de Ruffini:

	1	-4	1	6
2		2	-4	-6
	1	-2	-3	0
3		3	3	
	1	1		0

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$$

g) Treim factor comú i trobam les altres arrels resolent l'equació de segon grau

$$x^3 - 13x^2 + 36x = x(x^2 - 13x + 36)$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} x = 9 \\ x = 4 \end{matrix}$$

$$\text{Per tant: } x^3 - 13x^2 + 36x = x(x - 9)(x - 4)$$

h) Utilitzant la regla de Ruffini:

	2	-9	-8	15
1		2	-7	-15
	2	-7	-15	0
5		10	15	
	2	3		0

$$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = (x - 1)(x - 5)(2x + 3)$$

i) Treim factor comú i utilitzam la igualtat nota $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:
 $2x^4 - 18x^2 = 2x^2(x^2 - 9) = 2x^2(x + 3)(x - 3)$

j) Utilitzant la regla de Ruffini:

	1	-1	-1	-1	-2
-1		-1	2	-1	2
	1	-2	1	-2	0
2		2	0	2	
	1	0	1		0

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 1)$$

□ El polinomi $x^2 + 1$ no es pot factoritzar més perquè no té arrels reals).

Exercici 10

- Numerador → Treim factor comú i trobam les arrels del polinomi de grau 2 que ens queda resolent l'equació

$$x^3 + 7x^2 + 12x = x(x^2 + 7x + 12)$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} \quad f \quad \begin{array}{l} -\frac{8}{2} = -4 \\ -\frac{6}{2} = -3 \end{array}$$

$$\text{Així: } x^3 + 7x^2 + 12x = x \cdot (x + 4) \cdot (x + 3)$$

- Denominador → Descomposam aplicant Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -16 & -48 \\ 4 & & 4 & 28 & 48 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & 0 \end{array}$$

$x^2 + 7x + 12$ és un polinomi de segon grau que coincideix amb el d'abans i ja sabem que les seves arrels són -4 i -3 perquè les hem calculat anteriorment. Per tant, el denominador factoritzat queda $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = (x - 4)(x + 4)(x + 3)$

- Simplificació de la fracció algebraica:

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^3 + 3x^2 - 16x - 48} = \frac{x(x + 4)(x + 3)}{(x - 4)(x + 4)(x + 3)} = \frac{x}{x - 4}$$

Exercici 11

- Factoritzam el numerador

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = x \cdot (2x^2 - 5x + 3)$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} \quad f \quad \begin{array}{l} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{array}$$

Per tant:

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = x(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

- Factoritzam el denominador

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \quad f \quad \begin{array}{l} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ -\frac{8}{4} = -2 \end{array}$$

Per tant

$$2x^2 + x - 6 = (x + 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

- Simplifiquem la fracció algebraica:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6} = \frac{x(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{x(x-1)}{x+2}$$

Exercici 12

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3} = \frac{x(x^2 - 49)}{x^3(x-7)} = \frac{x(x-7)(x+7)}{x^3(x-7)} = \frac{x+7}{x^2}$$

Numerador: hem tret factor comú i aplicat la identitat notable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ a l'expressió $x^2 - 49$

Denominador: hem tret factor comú

Finalment simplifiquem la fracció: podem tatxar una x i el factor (x - 7)

Exercici 13

$$\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x} = \frac{3x(x^2 - 1)}{x(x^4 - 1)} = \frac{3x(x^2 - 1)}{x(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$$

Numerador: hem tret factor comú i aplicat la identitat notable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ a l'expressió $x^4 - 1$

Denominador: hem tret factor comú

Finalment simplifiquem la fracció

Exercici 14

Factoritzam el numerador i el denominador

- Numerador → Treim factor comú 2 y aplicam la regla de Ruffini fins a obtenir un polinomi de segon grau. Después resoldrem l'equació de segon grau i tendrem les arrels

$$2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$$

	1	5	8	4
-2		-2	-6	-4
	1	3	2	0

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad f \quad \frac{-4}{2} = -2$$

$$\frac{-2}{2} = -1$$

Per tant, el numerador factoritzat és: $2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2(x + 2)^2(x + 1)$

- Denominador → Com abans, factor comú 4, Ruffini fins a grau dos i resoldre l'equació

$$4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x^3 + 2x^2 - x - 2)$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & & -2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

El denominador factoritzat queda: $4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x+2)(x+1)(x-1)$

- Simplificació:

$$\frac{2x^3 + 10x^2 + 16x + 8}{4x^3 + 8x^2 - 4x - 8} = \frac{2(x+2)^2(x+1)}{4(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{(x+2)}{2(x-1)} = \frac{x+2}{2x-2}$$

Exercici 15

a) m.c.m. $[(x^2 - x), (x - 1), x] = x(x - 1)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x - 1}{x - 1} - \frac{3x - 1}{x} &= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{x(2x-1)}{x(x-1)} - \frac{(3x-1)(x-1)}{x(x-1)} = \\ &= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2x^2 - x}{x(x-1)} - \frac{3x^2 - 3x - x + 1}{x(x-1)} = \frac{1 + 2x^2 - x - 3x^2 + 3x + x - 1}{x(x-1)} = \\ &= \frac{-x^2 + 3x}{x(x-1)} = \frac{x(-x+3)}{x(x-1)} = \frac{-x+3}{x-1} \end{aligned}$$

- b) Efectuam la divisió:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \frac{2x - 10}{x^2 - 25} = \frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)}{(x^2 + 2x - 15)(2x - 10)}$$

Factorizam per simplificar:

- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, ya que las raíces de $x^2 - 6x + 9 = 0$ son:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \text{Raíz doble}$$

- $x^2 - 25 = \square x \square 5 \square \square x + 5 \square \rightarrow$ Identitat notable notable
- $x^2 + 2x - 15 = \square x + 5 \square \square x - 3 \square$, ya que las raíces de $x^2 + 2x - 15 = 0$ son:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \quad f \quad \frac{-10}{2} = -5$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

- $2x - 10 = 2(x - 5)$

Per tant:

$$\frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)}{(x^2 + 2x - 15)(2x - 10)} = \frac{(x-3)^2(x-5)(x+5)}{(x+5)(x-3)2(x-5)} = \frac{x-3}{2}$$

Exercici 16

a) Operam dins cada paréntesis i després multiplicam:

$$\left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{1+x^2}{x+1}$$

b) Si observam que $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$.

$$\text{Así, el m.c.m. } [1, (2x - 1), (4x^2 - 1)] = (2x - 1)(2x + 1).$$

Per tant

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-1} &= \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2x+1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{2x}{(2x-1)(2x+1)} = \\ &= \frac{4x^2 - 1 + 2x + 1 - 2x}{4x^2 - 1} = \frac{4x^2}{4x^2 - 1} \end{aligned}$$

Exercici 17

Calculamos el m.c.m. $[(x-2), (x^2 - 4x + 4)]$ que es $(x-2)^2$.

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Per tant

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{2+x}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{2+x}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 2 + x}{(x-2)^2} = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

Exercici 18

a) Primer resolés el paréntesis

$$\frac{2x}{x+1} - 1 = \frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

Ara feim la divisió:

$$\frac{2x}{x+1} : \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x-1}$$

b) m.c.m. $(2x, 3x^2, 6x^4) = 6x^4$

Per tant

$$\frac{x-2}{2x} - \frac{1-3x}{3x^2} + \frac{2x^2+3}{6x^4} = \frac{3x^3(x-2)}{6x^4} - \frac{2x^2(1-3x)}{6x^4} + \frac{2x^2+3}{6x^4} =$$

$$= \frac{3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 6x^3 + 2x^2 + 3}{6x^4} = \frac{3x^4 + 3}{6x^4} = \frac{3(x^4 + 1)}{6x^4} = \frac{x^4 + 1}{2x^4}$$

Exercici 19

a) Efectuam el producte:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x} = \frac{(x^4 - 3x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 6x + 9)}{(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x)}$$

Factoritzam per a simplificar:

- $x^4 - 3x^2 + 2x = x(x^3 - 3x + 2)$

Aplicam Ruffini a $x^3 - 3x + 2 = 0$ fins arribar a grau 2 i resollem l'equació:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad f \quad \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{-4}{2} = -2$$

Per tant: $x^4 - 3x^2 + 2x = x(x-1)^2(x+2)$

- $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
- $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
- $x^2 + 2x = x(x+2)$

Per tant:

$$\frac{(x^4 - 3x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 6x + 9)}{(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x)} = \frac{x(x-1)^2(x+2) \cdot (x-3)^2}{(x-1)^2 \cdot x(x+2)} = (x-3)^2$$

b) m.c.m. $[(x+4), (x-5)] = (x+4)(x-5)$

$$\frac{2x+4}{x+4} - \frac{2x+14}{x-5} = \frac{(2x+4)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{(2x-14)(x+4)}{(x+4)(x-5)} =$$

$$= \frac{2x^2 - 10x + 4x - 20}{(x+4)(x-5)} - \frac{2x^2 + 8x - 14x - 56}{(x+4)(x-5)} = \frac{2x^2 - 6x - 20 - 2x^2 + 6x + 56}{(x+4)(x-5)} =$$

$$= \frac{36}{(x+4)(x-5)} = \frac{36}{x^2 - x - 20}$$