ies el SUI

TRIGONOMETRIA

Matemàtiques 1r batxillerat

A *L'angle com a gir*

Fins ara, a trigonometria hem treballat amb angles aguts, els quals sempre es poden considerar com a angles d'un triangle rectangle. Però existeixen figures geomètriques amb angles de mesura més gran que 90º. Tractarem de mesurar i representar angles d'aquest tipus.

A.1

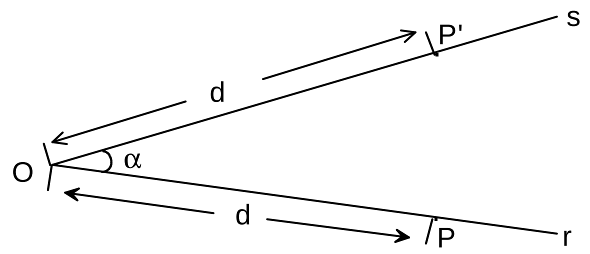
a) Una roda d'una màquina ha donat 5 voltes i mitja. Quina és la mesura de l'angle que ha girat qualsevol punt del volant?
b) I si ha donat 4 voltes i quart?
c) I si ha donat 10 voltes i tres quarts?
d) Si un punt de la roda ha girat un angle de mesura 2520º, quantes voltes ha donat? I si l'angle és de 1200º?
e) Troba un gir de menys d'una volta que deixi la roda en la mateixa posició que un gir de 900º.
f) Si haguessis de representar amb un angle els girs dels apartats a) b) c) d) i e) mitjançant quin angle ho faries?
g) Si la roda pot girar en tots dos sentits, com creus que podem diferenciar un sentit de gir de l'altre quan donem la mesura de l'angle recorregut?

En aquest exercici, com que $\frac{900^o}{360^o} = 2 + \frac{180^o}{360^o}$ o sigui 900º = 2·360º + 180º, hem parlat d'una roda que dóna per exemple 2 voltes i mitja, o que un punt ha girat un angle de 900º. Estem tractant l'angle com a gir. Quan diem que aquest gir ho representaríem mitjançant un angle de 180º (**ho hem reduït al primer gir**) l'estem considerant com a **element geomètric**.

Per determinar el camí recorregut per un punt P en passar a la posició P' en un gir de centre O, ens cal donar la mesura de l'angle format per POP'. Es a dir, un gir de centre O queda determinat per la mesura de l'angle format per la posició inicial d'un punt qualsevol, el centre O i la posició final d'aquest punt.
Així a cada gir de centre O li podem associar la mesura de l'angle format per:

- la posició inicial d'un punt qualsevol
- el centre O
- la posició final d'aquest punt.

Recíprocament, donat un angle de mesura a i vèrtex O, li podem associar el gir que fa que la semirecta **r** es transformi en la semirecta **s.**

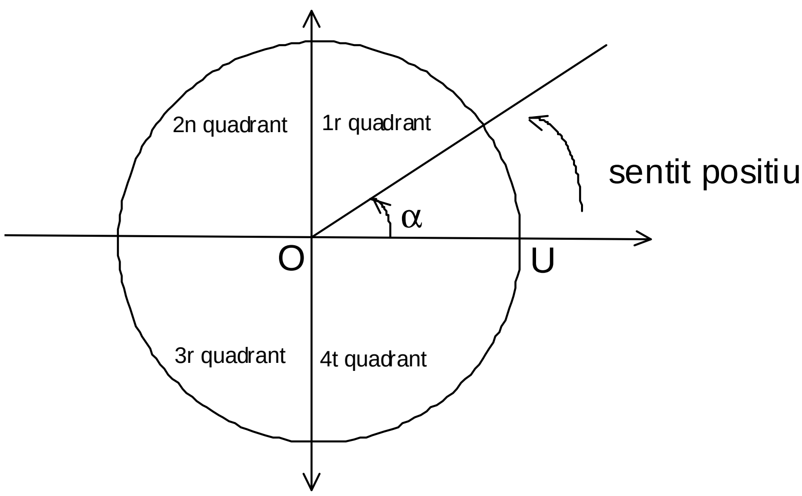


Un punt **P** de la recta **r** situat a una distància **d** de O es transforma en el punt **P’** de la recta **s** situat a la mateixa distància de O.

Per a representar i mesurar aquests angles o girs d’una manera determinada, cal adoptar un sistema de referència que ens permeti representar i mesurar l’angle format per una posició fixa que prenem com a origen (1r costat de l’angle) i una segona posició variable (2n costat de l’angle) amb un sentit de gir que passa de la 1a posició a la segona.

Per això, sobre uns eixos cartesians rectangulars, situarem:

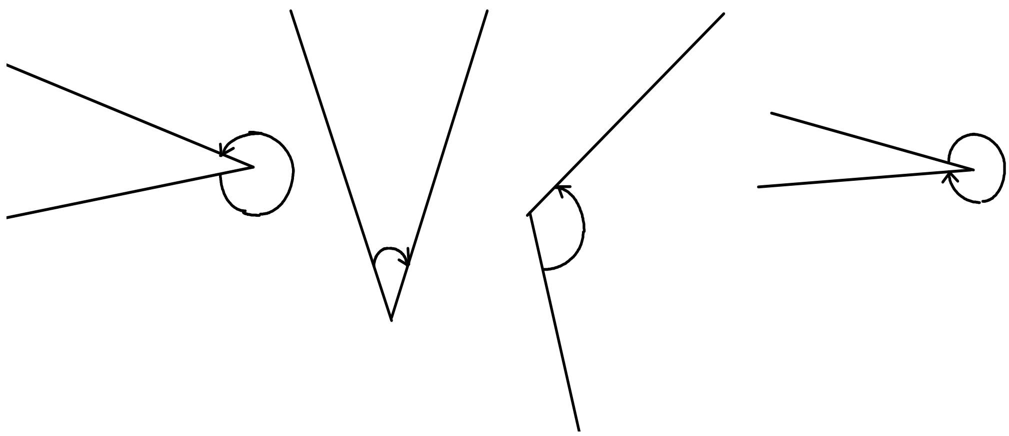
- el vèrtex O de l’angle a l’origen de coordenades
- el costat fix de l’angle sobre l’eix d’abscisses positiu
- com a sentit positiu de gir el sentit contrari al de les agulles del rellotge.



Els eixos divideixen el pla en quatre regions que s'anomenen quadrants. Així, segons a quin quadrant estigui el 2n costat d'un angle representat en el sistema de referència, direm que l'angle és del 1r, 2n, 3r o 4t quadrant.

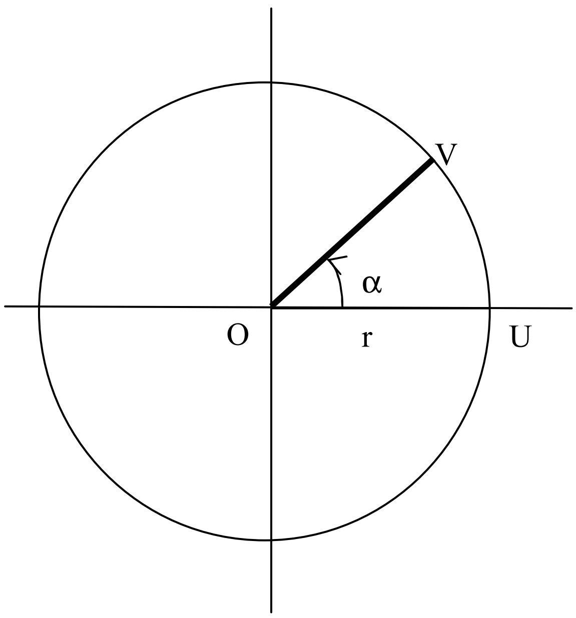
A.2

a) Dibuixa un sistema de referència per mesurar angles.
b) Transporta sobre el sistema de referència els angles següents, mesura'ls i digues a quin quadrant pertanyen.



A.3
Redueix al primer gir positiu i representa els angles següents:
370º ; 400º ; 1000º ; 3600º ; -20º ; -270º

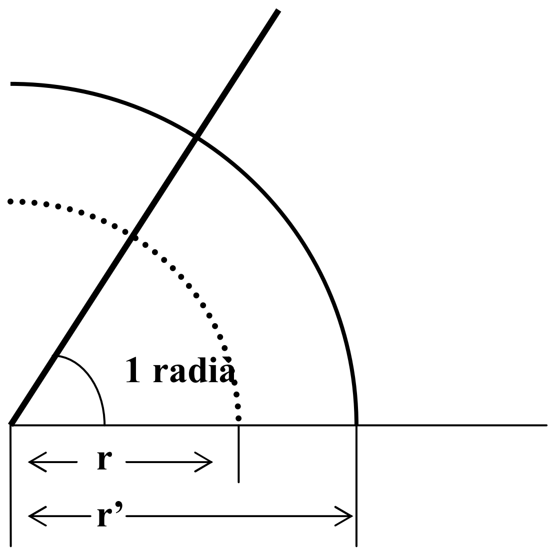
Hem vist que a un angle UOV de mesura α li associem un gir de centre O que transforma el punt U en el punt V



Però aquest gir també es pot caracteritzar donant la mesura de l'arc UV limitat per l'angle de mesura α sobre la circumferència. De manera que cada angle UOV té associat un arc UV i viceversa.

Segons aquestes consideracions, per donar la mesura d'un angle podem mesurar la longitud de l'arc de circumferència. La unitat mes adient en aquest cas, sembla ser la longitud del radi r

Així definirem 1 **radià** com la ***mesura d'un angle que determina un arc de circumferència de longitud igual al radi.***



Evidentment, la definició no depèn de la longitud del radi triat, perquè la longitud de l'arc corresponent és proporcional al radi en tractar-se de figures semblants.

Un angle de mesura 360º (tota la circumferència) determina un arc de $2\pi r$ i prenent el radi r com a unitat de mesura d'arcs, **donaria una mesura de l'angle de 2π radians.**

A.4

a)

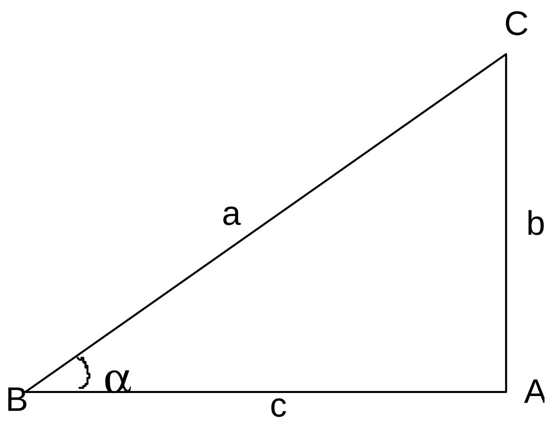
Expressa en radians els angles de 45º, 60º, 120º, 210º i 270º.

b)

Expressa en graus sexagesimals els angles de 1,5 rad, 2 rad , 0,75 rad, 3πrad.

B Raons trigonomètriques d’un angle qualsevol

Recorda que en un triangle rectangle:



sin α = $\frac{b}{a}$

cos α = $\frac{c}{a}$

tg α = $\frac{b}{c}$

i que hem demostrat que es compleixen les igualtats següents:

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

tg α = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

B.1 CONSTRUCCIÓ D’UN CERCLE TRIGONOMÈTRIC D’1 dm DE RADI

Per visualitzar més bé aquest estudi, dibuixa sobre paper mil·limetrat uns eixos de coordenades . Amb centre l’origen de coordenades O, dibuixa un cercle de radi 1dm. i gradua’l de 10º en 10º des de 0º a 360º, començant a partir del semieix positiu d’abscisses.

Aquest cercle l’anomenarem **cercle trigonomètric.**

Un cercle trigonomètric és un cercle que té el centre a l’origen de coordenades i té per radi la unitat.

B.2 Utilitza el cercle trigonomètric d'1 dm de radi per trobar, amb una precisió de dues xifres decimals, les raons trigonomètriques de la taula següent. Per això considera els angles representats sobre el sistema de referència del cercle. Pots comprovar l'error comès mitjançant la calculadora:

	sin	**cos**	**tg**
20º			
50º			
85º			

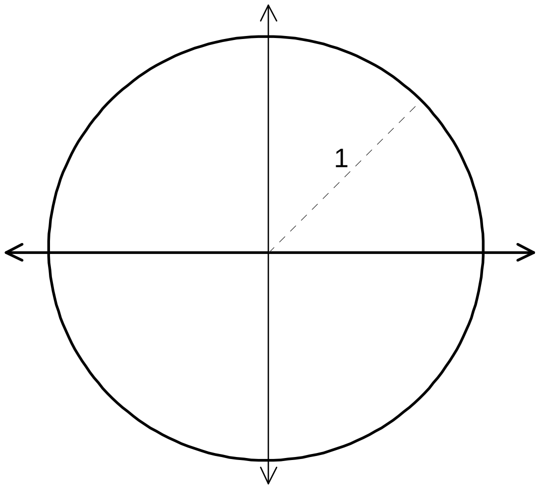
B.3 EL SINUS I EL COSINUS D'UN ANGLE QUALSEVOL

a) Com creus que podries trobar a partir del cercle d'1 dm de radi el sinus i el cosinus d'angles més grans de 90º?

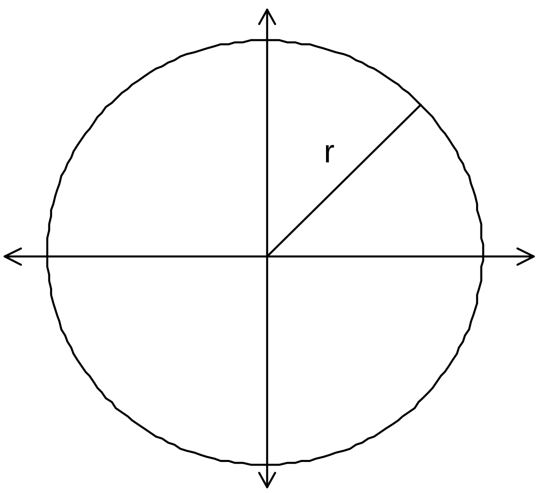
b) Omple la taula següent:

	sin	**cos**
130º		
260º		
340º		
450º		
-10º		
-140º		

c) Com definiries el sinus i el cosinus d'un angle de mesura ***a*** qualsevol que estigués representat en un cercle de radi unitat?



I si l'angle de mesura ***a*** qualsevol estigués representat en un cercle de radi r, com definiries el sinus i el cosinus ?



d) Quin valor pren el sinus i el cosinus de 0º, 90º, 180º, 270º i 360º ?

B.4 Representa en paper mil·limetrat els gràfics :

a) De la **funció** anomenada **sinus**, definida de la manera següent:

$$\begin{aligned} \sin : R &\to R \\ \alpha &\to \sin\alpha \end{aligned}$$

Indica les seves característiques.

b) De la **funció** anomenada **cosinus**, definida de la manera següent:

$$\begin{aligned} \cos : R &\to R \\ \alpha &\to \cos\alpha \end{aligned}$$

Indica les seves característiques.

B.5 LA TANGENT D'UN ANGLE QUALSEVOL

a) Com creus que podries trobar a partir del cercle d'1 dm de radi la tangent d'angles més grans de 90º?

b) Omple la taula següent :

	tg
190º	
130º	
-50º	
-270º	

c) Com definiries la tangent d'un angle de mesura a qualsevol que estigués representat en un cercle de radi unitat?

d) I si l'angle de mesura a qualsevol estigués representat en un cercle de radi r, com definiries la tangent ?

B.6 Representa en paper mil·limetrat el gràfic de la funció anomenada tangent, definida de la manera següent:

$$\begin{aligned} tg : R &\to R \\ \alpha &\to tg\,\alpha \end{aligned}$$

Indica les seves característiques.

B.7 EL SIGNE DE LES RAONS TRIGONOMÈTRIQUES

a) Digues en quin quadrant es troba el segon costat dels angles següents i troba el signe de les raons trigonomètriques. Intenta fer-ho mentalment, imaginant-te la posició de l'angle en el cercle trigonomètric.

	QUADRANT	**SIGNE** **sin cos tg**
156º		
25º		
293º		
97º		
200º		
-70º		
-304º		
500º		

b) Dibuixa un cercle trigonomètric i en ell els segments que representarien les raons trigonomètriques dels angles de l'apartat a). Indica sobre cada segment el signe de les raons trigonomètriques.

C relacions entre les raons trigonomètriques d'angles diferents

C.1
Utilitza el cercle trigonomètric d'1dm de radi per trobar en cada apartat **tots els angles del primer gir** que compleixen la condició donada. Un cop hagis trobat les solucions aproximades amb el cercle trigonomètric, utilitza les funcions trigonomètriques inverses de la calculadora per determinar-les amb més precisió.

a) sin a = 0.34 b) tg a = 0.95 c) cos a = -0.23

d) tg a = -0.20 e) cos a = 0.87 f) sin a = -0.54

C.2 Coneixent que $\cos 30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, troba les següents raons trigonomètriques exactes raonant sobre un cercle trigonomètric.

a) cos 150º ; cos 210º ; cos 330º ; cos (- 30º)

b) sin 60º ; sin 120º ; sin 240º ; sin 300º ; sin (-60º)

C.3 Digues si són certes o falses les igualtats següents per a qualsevol angle **a**. En cas que siguin falses canvia la raó trigonomètrica o/i el signe de manera que esdevinguin certes:

a) sin a = sin (180º + a) b) sin a = cos (180º - a)

c) cos a = cos (180º - a) d) cos a = - sin (- a)

e) sin a = - sin (- a) f) tg a = tg (360º - a)

g) cos a = - cos (360º + a) h) cos a = sin (90º + a)

i) sin a = sin (270º - a) j) cos a = - cos (90º -a)

C.4 Completa a la taula següent les igualtats que ens permeten trobar les raons d'angles del 2n, 3r, 4t quadrant en funció o a partir de les raons trigonomètriques d'angles del 1r quadrant, i veure la relació entre les raons trigonomètriques d'angles complementaris. (Recorda que dos angles són complementaris si sumen 90º)

2n quadrant 90º < a < 180º	3r quadrant 180º < a < 270º	4t quadrant 270º < a < 360º	angles complementaris
sin a = sin (180º- a)	sin a = - sin (a-180º)	sin a = - sin(360º-a)	sin a = cos (90º-a)
cos a =	cos a =	cos a =	cos a =
tg a =	tg a =	tg a =	tg a =

D *fórmules de l'addició*

D.1

a) Troba el valor de $\sin(30^\circ + 60^\circ)$
b) Calcula $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$
c) Què pots dir de la igualtat $\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$
d) Calcula $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$
e) Quina igualtat pots escriure?

D.2 Repeteix el mateix que has fet a l'exercici anterior per al $\sin(15^\circ + 30^\circ)$ i per al $\sin(30^\circ + 45^\circ)$
D.3 Creus que podem treure alguna conclusió dels exercicis anteriors?

Teniu compte de no confondre la raó trigonomètrica de la suma de dos angles amb la suma de les dues raons trigonomètriques.
Per tal de calcular les raons trigonomètriques d'una suma d'angles a partir de les raons trigonomètriques d'aquests angles, utilitzarem les anomenades fórmules d'addició:

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

D.4 A partir de les raons trigonomètriques dels angles de 30º i 45º troba el sinus i el cosinus dels angles de 75º , 60º , 15º i 90º, utilitzant les fórmules de l'addició .

D.5 A partir de les fórmules de l'addició troba una fórmula que posi el sinus de l'angle 2a en funció de les raons de l'angle a. Fes el mateix per al cosinus de 2a.

D.6 Troba les fórmules de $\sin(a + b + c)$ i $\cos(a + b + c)$ en funció de les raons trigonomètriques dels angles a , b i c.

E resolució de triangles

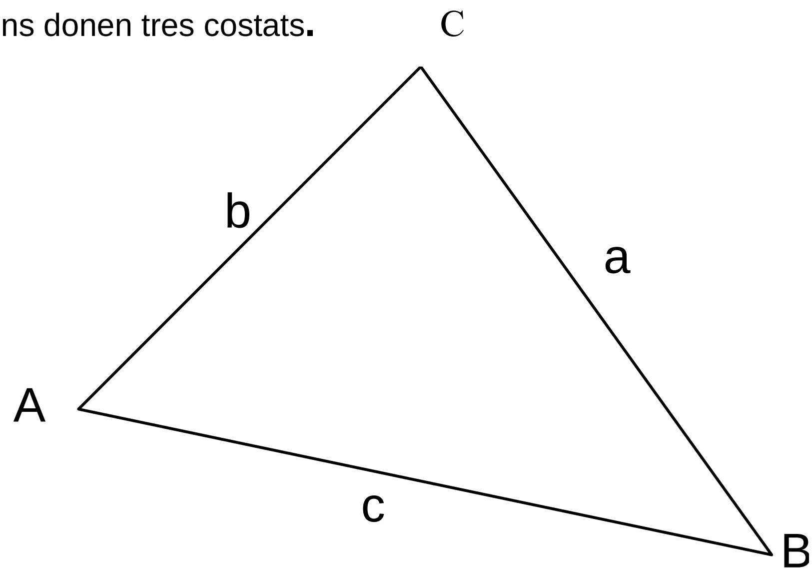
Recordeu que resoldre un triangle vol dir trobar el valor dels seus tres costats i dels seus tres angles. Per poder resoldre un triangle són necessàries tres dades, una de les quals ha de ser un costat. Així ens trobarem amb quatre casos:

1) Ens donen un costat i els dos angles adjacents

2) Ens donen dos costats i l'angle comprès

3) Ens donen dos costats i l'angle oposat a un d'ells.

4) Ens donen tres costats**.**



Recordeu també que en un triangle els angles els anomenem amb una lletra majúscula i els costats oposats amb la mateixa lletra però minúscula.
Un triangle el podem **resoldre gràficament**: dibuixant-lo a partir de les dades i mesurant els costats i angles que falten. Però també podem resoldre'l **analíticament** mitjançant càlculs a partir de les dades.
El curs passat vau resoldre triangles gràficament però analíticament només vau resoldre triangles a partir de les raons trigonomètriques d'un angle agut i el teorema de Pitàgores.

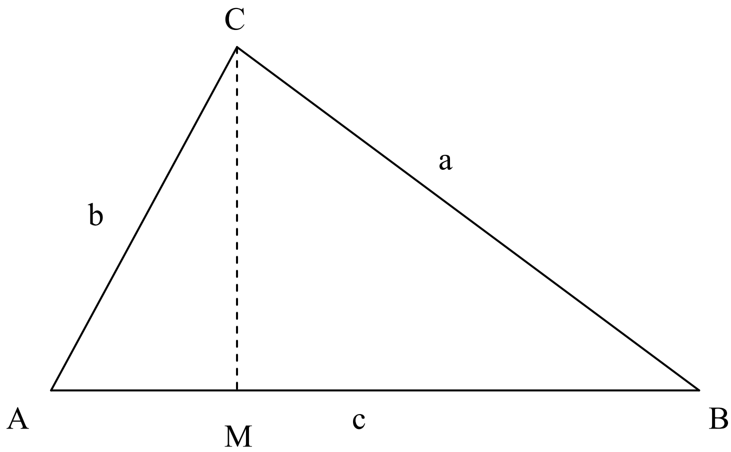
E.1 Resol el triangle rectangle que té per catets 3 i 7 cm.

Per poder resoldre analíticament qualsevol triangle necessitarem dos teoremes:
<u>Teorema del sinus:</u>
"Existeix proporcionalitat entre els costats d'un triangle i els sinus dels angles oposats".

Es a dir:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Per demostrar-lo, considerem un triangle qualsevol ABC, tracem l'altura des del vèrtex C (perpendicular al costat oposat).



Amb això, el triangle ABC ens queda dividit en dos triangles rectangles : AMC i BMC, als que podem aplicar la definició de raó trigonomètrica d'un angle agut en un triangle rectangle.

Tindrem per tant, considerant el triangle AMC:

sin A = $\frac{CM}{b}$; CM = b·sinA

considerant ara el triangle BCM:

sin B = $\frac{CM}{a}$; CM = a·sinB

Igualant aquestes dues expressions que hem obtingut per CM :
b·sinA = a·sinB igualtat que podem expressar en la forma:
Si repetíssim el procés per l'altura traçada des del vèrtex A demostraríem :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

i si ho féssim per la tercera altura trobaríem:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

que ens permet formular l'anomenat teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Repeteix la demostració en el cas que el triangle sigui un triangle obtusangle.

<u>Teorema del cosinus:</u>

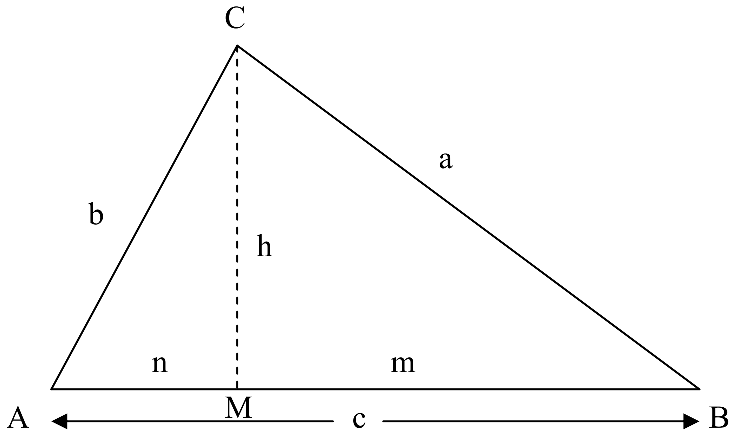
" **En tot triangle, el quadrat d'un costat és igual a la suma dels quadrats dels altres dos menys el doble del producte d'aquests dos costats pel cosinus de l'angle que formen."**

Es a dir:

$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$

$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$



Per demostrar-lo, considerem un triangle qualsevol ABC, tracem l'altura des del vèrtex C (perpendicular al costat oposat). Amb això, el triangle ABC ens queda dividit en dos triangles rectangles : AMC i BMC.

Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle BMC rectangle a M:

$a^2 = h^2 + m^2$

però com el costat $c = m + n$ tenim que $m = c - n$. Substituint aquesta expressió que hem obtingut per m en la que hem d'aplicar el teorema de Pitàgores, resulta:

$a^2 = h^2 + (c - n)^2 = h^2 + c^2 - 2cn + n^2$

aplicant el teorema de Pitàgores ara al triangle CMA, rectangle a M tenim que:

$b^2 = h^2 + n^2$, podem per tant substituir a l'expressió anterior $h^2 + n^2$ per b^2 i ens queda en la forma:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$

al mateix triangle CMA $\cos A = \frac{n}{b}$ i , aïllant l'n $n = b \cdot \cos A$ expressió d'n que podem substituir a la igualtat anterior:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos A$

Fent el mateix en el cas de les altures traçades des de els altres dos vèrtex demostraríem les altres dues igualtats. Si l'altura és exterior, o sigui B o C són obtusos, caldrà variar una mica la demostració. (Cal considerar un triangle rectangle exterior).

E.2 Resol analíticament i gràfica els següents triangles:

a) a = 11 cm B = 110º C = 40º

b) b = 10 cm c = 7 cm A = 30º

c) 1) b = 11 cm c = 8 cm B = 40º

2) a = 9 cm b = 12 cm A = 70º

3) a = 14 cm c = 10 cm C = 25º

d) a = 10 cm b = 15 cm c = 12 cm

E.3 Fes un esquema dels diversos casos que es poden donar al resoldre un triangle si coneixem dos costats i un angle que no és el determinat pels dos costats coneguts (les dades són a , b i A)

Indicació: Considera per separat el cas que A sigui agut i el cas que sigui obtús.

Analitza la situació segons la relació de les longituds dels costats a i b.

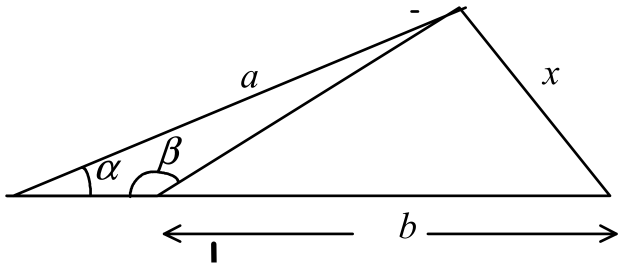
E.4 Resol analíticament els triangles:

a = 9 cm	b = 15 cm	A = 30º
a = 13 cm	b = 11 cm	c = 9 cm
b = 12 cm	c = 7 cm	B = 50º
a = 12 cm	b = 6 cm	C = 115º
a = 5 cm	b = 4 cm	c = 11 cm
a = 8 cm	b = 7 cm	B = 95º

E.5 Un vaixell surt d'un port navegant a 45 Km/h. A 15 Km en direcció nord del port hi ha un far. Si el vaixell navega en direcció nord-oest, troba la seva distància al far al cap d'una hora i mitja d'haver sortit del port.

E.6 Un riu té les dues riberes paral·leles. Des de dos punts d'una d'elles distants 30 m., s'observa un punt situat a l'altre costat. Les visuals formen amb la direcció de l'aigua del riu uns angles respectius de 28º i 54º. Calcula l'amplada del riu.

E.7 Troba una fórmula que expressi x en funció d'a, b, a, b.

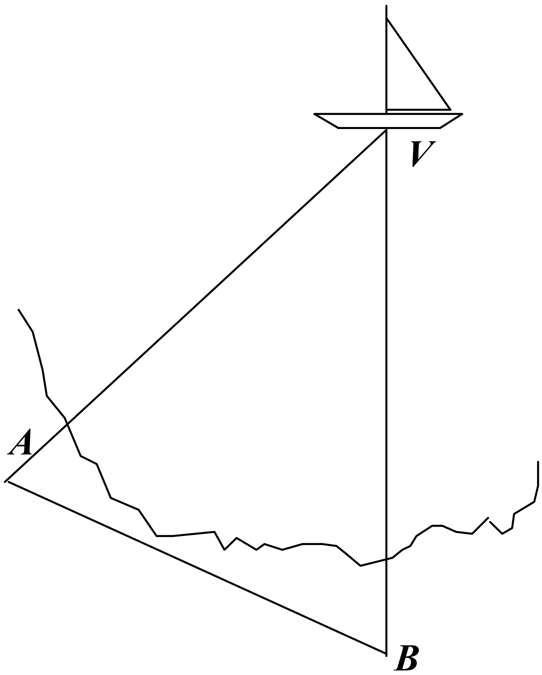


E.8 Des de dos punts A i B distants 20 m. , observem dos altres punts C i D inaccessibles. Si coneixem els angles:

DAB = 72º CBA = 38º DAC = 28º CBD = 20º

i des d'A veiem el punt D entre C i B, troba gràficament i analítica la distància entre C i D.

E.9 Des d'una platja, observem un vaixell ancorat en el mar. Per a saber a quina distància es troba fem dues observacions des dels punts A i B separats per una distància de 100m.
Mesurem els angles VAB i ABV : 88º 12' i 89º 35' respectivament.

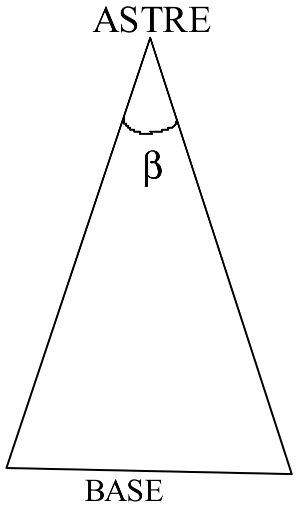


a) Calcula les distàncies AV i BV.

b) Si la precisió dels angles és de 1' d'arc. Calcula quin és l'error màxim que s'ha pogut cometre als càlculs de l'apartat anterior.

c) Troba el mateix error si l'error en els angles hagués estat de 15'.

E.10 El procés seguit per calcular la distància a l'exercici anterior està basat en l'efecte de paral·laxi. És el mateix procediment que s'ha fet servir en astronomia per a saber amb precisió les distàncies a que es troben els astres.



a) Així per a saber la distància de la Terra a la Lluna es fan observacions agafant com a base una distància igual al radi de la Terra (6 370 km). L'angle b (angle de paral·laxi) té un valor de 0,95º. Calcula amb aquestes dades la distància de la Terra a la Lluna.

b) L'estel més proper a la Terra és Alpha Centauri. Utilitzant com a base d'observació el diàmetre de l'òrbita de la Terra al voltant del Sol (la distància de la Terra al Sol és de 150 milions de km) i sabent que l'angle de paral·laxi és de 1,52 segons d'arc, calcula la distància a que ens trobem d'aquest estel.

.